XV Olimpiada Nacional Escolar de Matemática (ONEM 2018)
Segunda Fase – Nivel 3 – Solucionario.

1) Para el campeonato deportivo que organiza una institución educativa, quince costureras elaboraron 300 polos en 4 horas de trabajo. ¿Cuántos polos pueden elaborar diez costureras en 5 horas de trabajo?

SOLUCION:
Sea “x” el número de polos que pueden hacer las diez costureras en cinco horas de trabajo. Para resolver el problema vamos utilizar el método de las rayas, porque se trata de una regla de tres compuesta:

Costureras	Horas	Polos
15	4	300
10	5	x

$$15 \times 4x = 10 \times 5 \times 300$$

$$x = \frac{10 \times 5 \times 300}{15 \times 4}$$

$$x = 250$$

RESPUESTA: Diez costureras en cinco horas de trabajo pueden hacer 250 polos.

2) Una empresa vende frutas y verduras. Según los datos del mes pasado, del número total de kilogramos vendidos, el n% corresponden a las frutas. Además, del número total de kilogramos de fruta vendidos, el n% corresponden a manzanas. Determine el valor de n, si se sabe que del número total de kilogramos vendidos, el 16% corresponden a manzanas.

SOLUCION:
Asignando las siguientes variables:
Cantidad de frutas en kilogramos = x.
Cantidad de verduras en kilogramos = y.
Cantidad de manzanas en kilogramos = m.
Total = $x + y$.

El número total de kilogramos vendidos, el n% corresponden a las frutas:

$$n\% = \frac{x}{x+y}$$

$$\frac{n}{100} = \frac{x}{x+y}$$

$$x + y = \frac{100x}{n} \dots (\alpha)$$

El número total de kilogramos de fruta vendidos, el n% corresponden a manzanas:

$$n\% = \frac{m}{x}$$

$$\frac{n}{100} = \frac{m}{x}$$

$$\frac{nx}{100} = m \dots (\theta)$$

El número total de kilogramos de fruta vendidos, el n% corresponden a manzanas:

$$16\% = \frac{m}{x+y}$$

$$\frac{16}{100} = \frac{m}{x+y}$$

$$x+y = \frac{100m}{16} \dots (\beta)$$

Igualando ambas ecuaciones: (α) = (β)

$$\frac{100x}{n} = \frac{100m}{16}$$

$$\frac{16x}{n} = m$$

Igualando la ecuación anterior con la ecuación (θ)

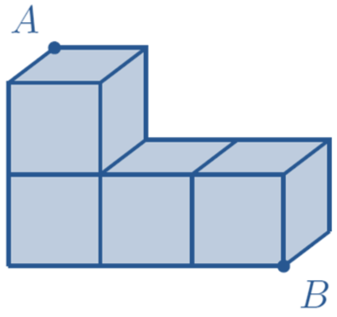
$$\frac{16x}{n} = m$$

$$\frac{16x}{n} = \frac{nx}{100}$$

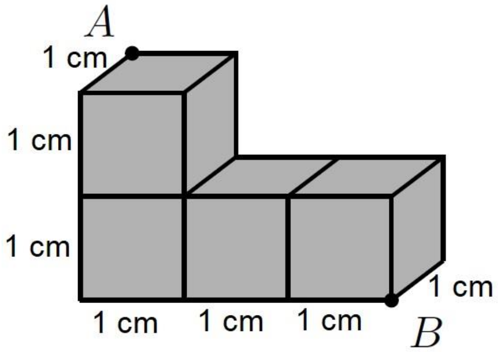
$$1600 = n^2$$
$$40 = n$$

RESPUESTA: El valor de n es igual a 40.

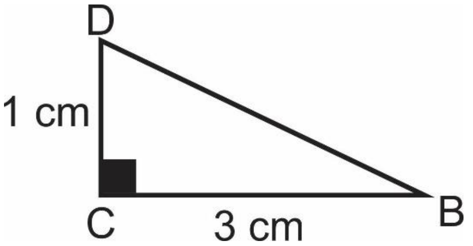
3) La siguiente figura se hizo con 4 cubos de 1 cm de lado. Si la medida del segmento cuyos extremos son los vértices A y B es $\sqrt{n}$ cm, calcule el valor de n.



SOLUCION:
Cada cubo mide 1 cm:

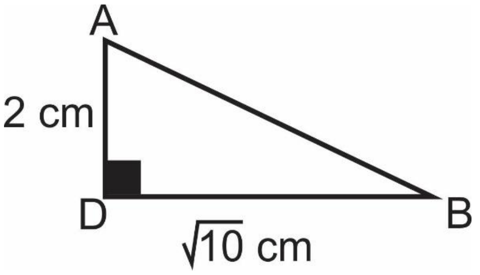


Graficando el ΔBCD que se encuentra en la base de los cubos en un plano horizontal:



Hallando la hipotenusa:
$DB^2 = 1^2 + 3^2$
$DB^2 = 1 + 9$
$DB = \sqrt{10}$

Graficando el ∆BDA que se encuentra en un plano vertical:



Hallando la hipotenusa:
$AB^2 = 2^2 + \sqrt{10}^2$
$AB^2 = 4 + 10$
$AB = \sqrt{14}$

Según dato del problema: $AB = \sqrt{n}$; pero hemos encontrado $AB = \sqrt{14}$. Por tanto, $n = 14$.

RESPUESTA: El valor de n es 14.

4) Los números enteros positivos a, b y c satisfacen las siguientes desigualdades:

$$a < 2b,\ b < 2c \text{ y } c < 18.$$

Determine el mayor valor posible de a.

SOLUCION:

Según los datos del problema se tiene: $a < 2b$
También tenemos la expresión: $b < 2c$
A esta última expresión le vamos a multiplicar por 2 a cada miembro de la inecuación:

$$2 \times b < 2 \times 2c$$
$$2b < 4c$$

Asimismo, tenemos la expresión: $c < 18$
A esta última expresión le vamos a multiplicar por 4 a cada miembro de la inecuación:

$$4 \times c < 4 \times 18$$
$$4c < 72$$

De las tres inecuaciones: $a < 2b$; $2b < 4c$ y $4c < 72$, podemos obtener: $a < 2b < 4c < 72$
$4c$ representa el máximo múltiplo de 4 que sea menor que 72 y es el número 68.
$2b$ representa el máximo múltiplo de 2 que sea menor que 68 y es el número 66.
a es menor que 66. Por tanto, para que a sea el mayor posible, $a = 65$.

RESPUESTA: El mayor valor posible de a es 65.

5) Un grupo de $m + n$ personas está repartido en dos salones. En el primer salón hay m personas cuyo promedio de edades es 24. En el segundo salón hay n personas cuyo promedio de edades es 36. Una persona se trasladó del segundo salón al primero y al hacer esto sucedió que cada uno de los dos salones aumentó su promedio de edades en 1. Determine el valor de $m + n$.

SOLUCION:

Según datos del problema:
Total de personas: $m + n$.

Primer salón: m personas, promedio: $\overline{x_1} = 24$

$$\overline{x_1} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_m}{m}$$

$$24 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_m}{m}$$

$$24m = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_m \quad \ldots(\alpha)$$

Segundo salón: n personas, promedio: $\overline{x_2} = 36$

$$\overline{x_2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

$$36 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

$$36n = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \quad \ldots(\beta)$$

Una persona se trasladó del segundo salón al primero. Sea “z” la edad de esa persona, y sucederá lo siguiente:

Primer salón: $m + 1$ personas, nuevo promedio: $\overline{x_1} = 25$

$$\overline{x_1} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_m + z}{m + 1}$$

$$25 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_m + z}{m + 1}$$

$$25(m+1) = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_m + z$$

Reemplazando (α) en la ecuación anterior:

$$25(m+1) = (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_m) + z$$
$$25(m+1) = 24m + z$$
$$25m + 25 = 24m + z$$
$$m + 25 = z \quad \ldots(\theta)$$

Segundo salón: $n - 1$ personas, nuevo promedio: $\overline{x_1} = 37$

$$\overline{x_1} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n - z}{n - 1}$$

$$37 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n - z}{n - 1}$$

$$37(n - 1) = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n - z$$

Reemplazando (β) en la ecuación anterior:

$$37(n - 1) = (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n) - z$$
$$37(n - 1) = 36n - z$$
$$37n - 37 = 36n - z$$
$$n - 37 = -z$$
$$z = 37 - n \quad \ldots(\delta)$$

Igualando ambas ecuaciones $(\theta) = (\delta)$:

$$m + 25 = 37 - n$$

$$m + n = 37 - 25$$
$$m + n = 12$$

RESPUESTA: El valor de $m + n$ es 12.

6) La media de siete datos es 7 y se sabe que los cinco primeros datos son 1; 3; 5; 11 y 5. ¿Cuál es el menor valor posible de la varianza de los siete datos?
Aclaración: Recuerde que la varianza de los datos $x_1; x_2; ...; x_n$ se define como la media de los números $(x_1 - m)^2; (x_2 - m)^2; ...; (x_n - m)^2$, donde m es la media de los datos. Por ejemplo, la varianza de los tres datos 1; 3; 8 es $\frac{(1-4)^2+(3-4)^2+(8-4)^2}{3} = \frac{26}{3}$

SOLUCION:
Sea "m" la media de los datos, entonces: $m = 7$. Asimismo, dato 6: x_6 y dato 7: x_7.
Utilizando la definición de la media se tiene:

$$m = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7}{7}$$

$$7 = \frac{1 + 3 + 5 + 11 + 5 + x_6 + x_7}{7}$$

$$49 = 25 + x_6 + x_7$$
$$24 = x_6 + x_7$$

Utilizando la definición de varianza se tiene:

$$Varianza = \frac{(1-7)^2 + (3-7)^2 + (5-7)^2 + (11-7)^2 + (5-7)^2 + (x_6-7)^2 + (x_7-7)^2}{7}$$

$$Varianza = \frac{(-6)^2 + (-4)^2 + (-2)^2 + (4)^2 + (-2)^2 + (x_6-7)^2 + (x_7-7)^2}{7}$$

$$Varianza = \frac{36 + 16 + 4 + 16 + 4 + (x_6-7)^2 + (x_7-7)^2}{7}$$

$$Varianza = \frac{76 + (x_6-7)^2 + (x_7-7)^2}{7}$$

Para que la varianza sea la menor posible, la diferencia de los datos y la media tiene que ser la menor posible, esto sucederá cuando ambos datos coincidan, es decir, $x_6 = 12$, $x_7 = 12$, ya que su suma es igual a 24.

$$Varianza_{(Mínima)} = \frac{76 + (12-7)^2 + (12-7)^2}{7}$$

$$Varianza_{(Mínima)} = \frac{76 + (5)^2 + (5)^2}{7}$$

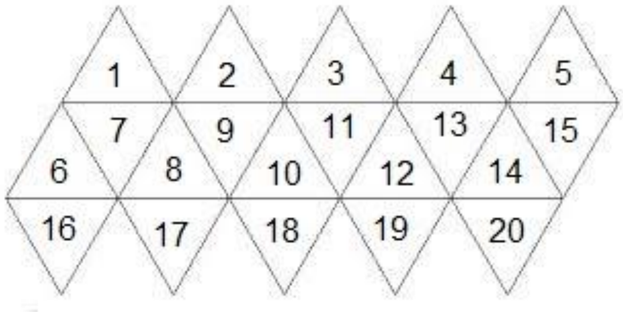
$$Varianza_{(Mínima)} = \frac{76 + 25 + 25}{7} = \frac{126}{7} = 18$$

RESPUESTA: El menor valor posible de la varianza de los siete datos es 18.

7) Se escogen al azar dos caras distintas de un icosaedro regular (que tiene 20 caras que son triángulos equiláteros). Sea p la probabilidad de que dichas caras sean disjuntas, es decir, que no compartan un vértice o una arista. Calcule el valor de $\frac{60}{p}$.

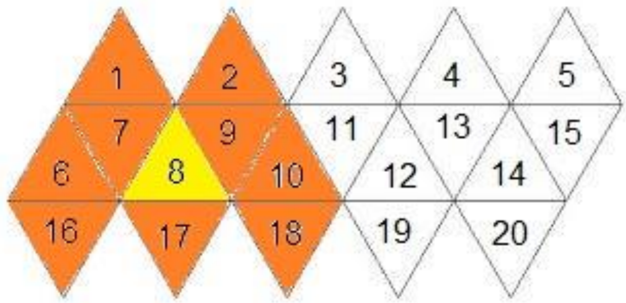
Aclaración: Considere que todas las caras tienen la misma probabilidad de ser escogidas.

SOLUCION:
En primer lugar, vamos a enumerar las caras de un icosaedro regular utilizando una plantilla:



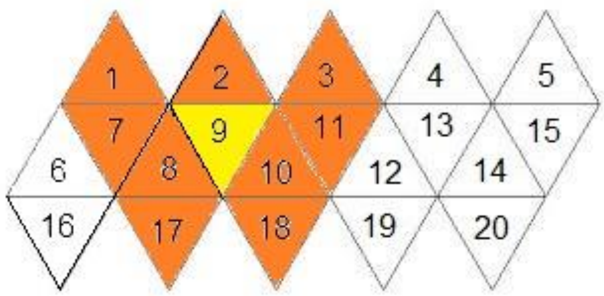
Vamos a contar las caras disjuntas que están ubicados en el centro, es decir, las caras 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14 y 15.

- Empecemos con la cara 8:



8 y 3
8 y 4
8 y 5
8 y 11
8 y 12
8 y 13
8 y 14
8 y 15
8 y 19
8 y 20 Total 10

- Ahora la cara 9:



9 y 6
9 y 16
9 y 4
9 y 5
9 y 12
9 y 13
9 y 14
9 y 15
9 y 19
9 y 20 Total 10

En consecuencia, lo mismo será para las caras del 6; 7; 10; 11; 12; 13; 14 y 15.
Entonces, en total se tiene: 10(10) = 100 de dos caras disjuntas.
Cabe mencionar que no entran al conteo las caras 1; 2; 3; 4; 5; 16; 17; 18; 19 y 20 porque ya se contaron al momento de contar las caras del centro.

Utilizando la regla de Laplace para hallar la probabilidad de obtener dos caras disjuntas del icosaedro:

$$P(A) = \frac{Casos\ favorables\ de\ A}{Total\ casos\ posibles}$$

$$P(2\ caras\ disjuntas) = \frac{100}{C_{2}^{20}}$$

$$P(2\ caras\ disjuntas) = \frac{100}{\frac{20 \times 19}{1 \times 2}}$$

$$P(2\ caras\ disjuntas) = \frac{100}{190}$$

$$P(2\ caras\ disjuntas) = \frac{10}{19}$$

Finalmente, hallando: $\frac{60}{P}$

$$\frac{60}{P(2\ caras\ disjuntas)}$$

$$\frac{\frac{60}{1}}{\frac{10}{19}}$$

$$\frac{60 \times 19}{10 \times 1}$$

6×19
114

RESPUESTA: El valor de $\frac{60}{P}$ es 114.

8) Sean x y y números reales positivos tales que $x \neq y$ y además:

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}=\frac{2}{1+xy}$$

Determine el menor valor posible de $(1+2x^2)(1+18y^2)$.

SOLUCION:

Simplificando la ecuación planteada:

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}=\frac{2}{1+xy}$$

$$\frac{1+y^2+1+x^2}{(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{2}{1+xy}$$

$$(2 + x^2 + y^2)(1 + xy) = 2(1 + x^2)(1 + y^2)$$

$$2 + 2xy + x^2 + x^3y + y^2 + xy^3 = 2(1 + y^2 + x^2 + x^2y^2)$$

$$2 + 2xy + x^2 + x^3y + y^2 + xy^3 = 2 + 2y^2 + 2x^2 + 2x^2y^2$$

$$x^3y + xy^3 - 2x^2y^2 = x^2 + y^2 - 2xy$$

$$xy(x^2 + y^2 - 2xy) = (x^2 + y^2 - 2xy)$$

$$xy = 1$$

De la expresión anterior, se puede afirmar que el producto de dos números reales positivos es igual a uno, para ello vamos a probar con los primeros números enteros positivos reemplazando en: $(1+2x^2)(1+18y^2)$.

- Si: $x = 2 \rightarrow y = ½$, Reemplazando se tiene:

$$(1+2(2)^2)(1+18(½)^2)$$
$$(1+8)(1+9/2)$$
$$(9)(11/2)$$
$$99/2 = 49{,}5$$

- Si: $x = 3 \rightarrow y = 1/3$, Reemplazando se tiene:

$$(1+2(3)^2)(1+18(1/3)^2)$$
$$(1+18)(1+2)$$
$$(19)(3)$$
$$27$$

- Si: $x = 4 \rightarrow y = ¼$, Reemplazando se tiene:

$$(1+2(4)^2)(1+18(1/4)^2)$$
$$(1+32)(1+9/8)$$
$$(33)(17/8)$$
$$561/8 = 70{,}125$$

De los ejemplos presentados se puede concluir que a medida que los primeros factores crecen (9; 19 y 33) los segundos factores se hacen más pequeños (11/2; 3 y 17/8); pero los productos finales también crecen (49,5; 27 y 70;125), esto sucede porque los factores son diferentes, entonces para que el producto sea el menor posible los factores tienen que ser iguales, es decir:

$$1 + 2x^2 = 1 + 18y^2$$
$$2x^2 = 18y^2$$
$$x^2 = 9y^2$$
$$x = 3y$$
$$x = 3 \times \frac{1}{x}$$

$$x^2 = 3$$
$$x = \sqrt{3} \quad \text{Por tanto } y = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Reemplazando se tiene:

$$(1+2x^2)(1+18y^2)$$
$$\left(1 + 2\left(\sqrt{3}\right)^2\right)\left(1 + 18\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)$$
$$(1 + 2 \times 3)\left(1 + 18 \times \frac{1}{3}\right)$$
$$(7)(7)$$
$$49$$

RESPUESTA: El menor valor posible de $(1+2x^2)(1+18y^2)$ es 49.

9) Cada casilla de un tablero de 8×8 se va a pintar de rojo, verde o azul, de tal forma que cada subtablero de 3×3 tenga al menos una casilla de cada uno de los tres colores. ¿Cuántas casillas rojas puede haber como máximo?

SOLUCION:
Encontrando una distribución de las casillas con las condiciones del problema:

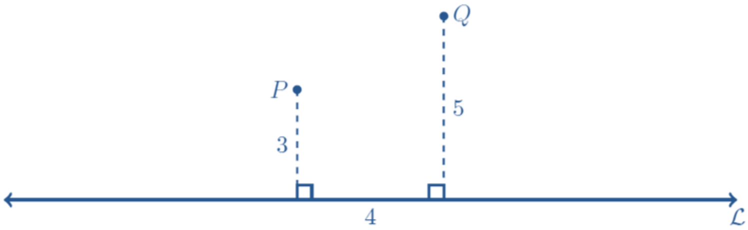
R	R	R	R	R	R	R	R
R	R	R	R	R	R	R	R
R	A	V	R	A	V	R	A
R	R	R	R	R	R	R	R
R	R	R	R	R	R	R	R
R	A	V	R	A	V	R	A
R	R	R	R	R	R	R	R
R	R	R	R	R	R	R	R

Donde:
A: Casilla de color azul.
V: Casilla de color verde.
R: Casilla de color rojo.

Casillas de color rojo: 6(8) + 2(3) = 48 + 6 = 54

RESPUESTA: Como máximo se pueden contar con 54 casillas de color rojo.

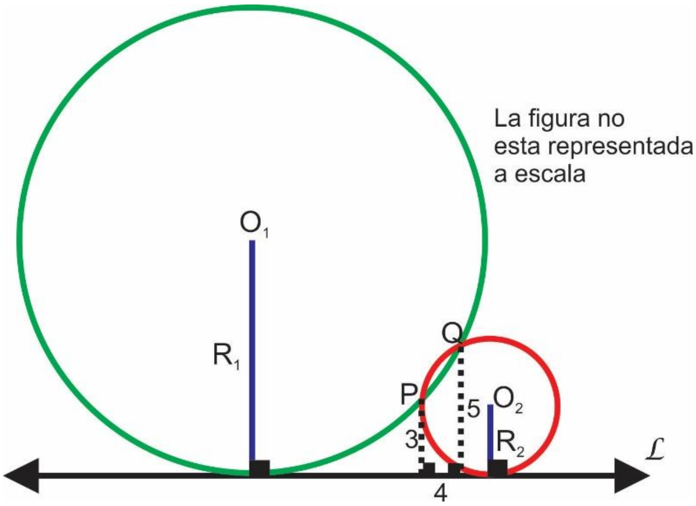
10) En la figura se muestra una recta $\mathcal{L}$ y dos puntos P y Q a un mismo lado de ella. Las distancias de P y Q a $\mathcal{L}$ son 3 cm y 5 cm, respectivamente. La distancia entre los pies de las proyecciones de P y Q sobre $\mathcal{L}$ es 4 cm.



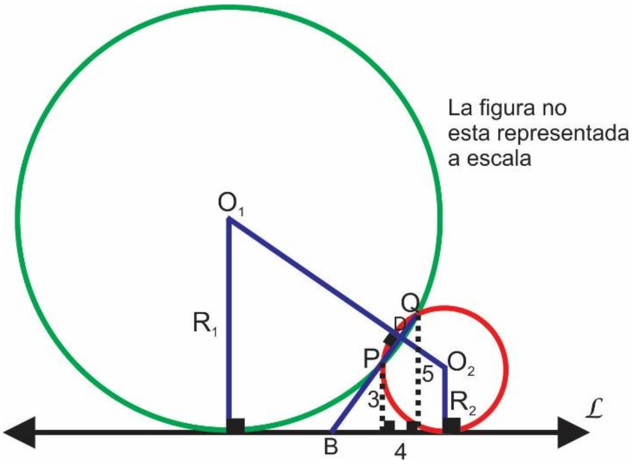
Hay dos circunferencias tales que cada una pasa por los puntos P y Q, y es tangente a $\mathcal{L}$. Calcule la suma de los radios de esas dos circunferencias, en cm.

SOLUCION:

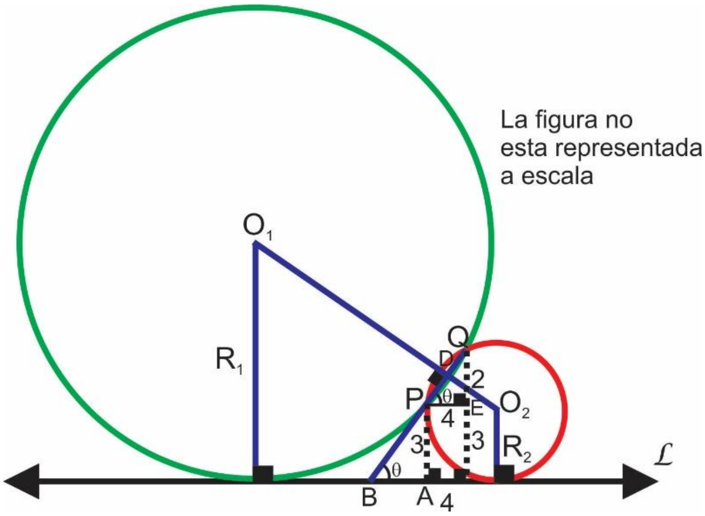
Vamos a trazar las dos circunferencias que pasen por los puntos P y Q y que sea tangente a la recta $\mathcal{L}$.



Vamos a trazar el segmento PQ y su prolongación hasta la recta $\mathcal{L}$ que corta en el punto B.
Por propiedad de las circunferencias secantes se tiene: "*En dos circunferencias secantes el segmento que une los centros es parte de la mediatriz de la cuerda común a las circunferencias*".



El segmento O_1O_2 une los centros de las dos circunferencias, además $PQ \perp O_1O_2$, por lo que PD = DQ.
Sea el punto A, vamos a trazar el segmento PE // $\mathcal{L}$. Sea $m\angle PBA = \theta$, por ángulos correspondientes $m\angle QPE = \theta$, PE = 4 cm.

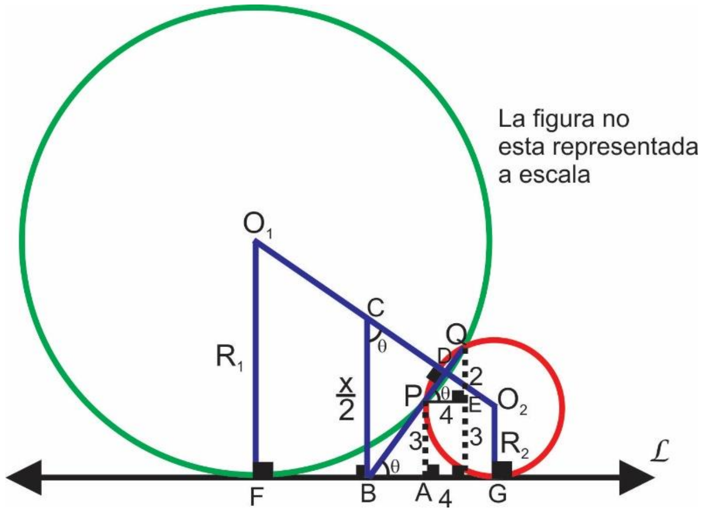


Sea x = R_1 + R_2, también los puntos F y G. Vamos a trazar el segmento BC, donde BC$\perp\mathcal{L}$, como el ∆BCD es rectángulo, entonces m∠BCD = θ.

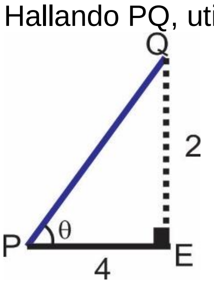
Por propiedad de las circunferencias secantes se tiene: "*La recta que pasa por los puntos de intersección de las circunferencias secantes, pasa por el punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos de tangencia*". Es decir, FB = BG, en consecuencia, BC es la mediana del trapecio rectángulo O_1O_2GF, por tanto:

$$BC = \frac{R_1 + R_2}{2}$$

$$BC = \frac{x}{2}$$

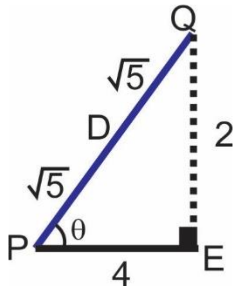


Hallando PQ, utilizando el teorema de Pitágoras en el ∆PEQ.



$$PQ^2 = 2^2 + 4^2$$
$$PQ^2 = 4 + 16$$
$$PQ = \sqrt{20}$$
$$PQ = 2\sqrt{5}$$

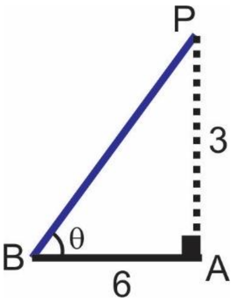
El punto D se encuentra en la mitad de la hipotenusa del ∆PEQ.



ΔPAB ~ ΔPEQ por AA (Ángulo – ángulo) y hallamos BA

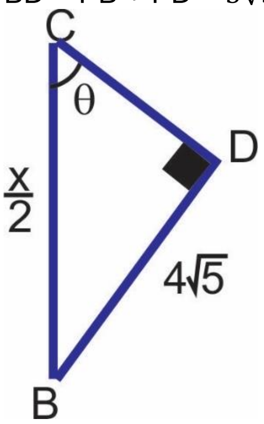
$$\frac{2}{3} = \frac{4}{BA}$$
$$2BA = 12$$
$$BA = 6$$

Hallando PB, utilizando el teorema de Pitágoras en el ΔPBA.



$$PB^2 = 3^2 + 6^2$$
$$PB^2 = 9 + 36$$
$$PB = \sqrt{45}$$
$$PB = 3\sqrt{5}$$

BD = PB + PD = $3\sqrt{5} + \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$. Entonces, los lados del ΔBCD serían:



$Sen\theta$ en el ΔCBD

$$Sen\theta = \frac{4\sqrt{5}}{\frac{x}{2}} \ldots (\alpha)$$

$Sen\theta$ en el ΔPBA

$$Sen\theta = \frac{3}{3\sqrt{5}} \ldots (\beta)$$

$$(\alpha) = (\beta)$$
$$\frac{4\sqrt{5}}{\frac{x}{2}} = \frac{3}{3\sqrt{5}}$$
$$4\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} = \frac{3x}{2}$$
$$4 \times 5 = \frac{x}{2}$$
$$20 \times 2 = x$$
$$40 = x$$

RESPUESTA: La suma de los radios de las dos circunferencias es 40 cm.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN