XV Olimpiada Nacional Escolar de Matemática (ONEM 2018)
Segunda Fase – Nivel 2 – Solucionario.

1) La operación A consiste en restar 10 y la operación B consiste en multiplicar por 4/5. A un número se le aplicó la operación A y luego la operación B, de esta forma el resultado final fue 24. ¿Cuál hubiese sido el resultado final si las operaciones se realizan en el otro orden (primero B y luego A)?

SOLUCION:
Planteando los enunciados:
A: – 10
B: $\times\frac{4}{5}$

Sea "x" el número:

$$\frac{4(x-10)}{5}=24$$
$$4x - 40 = 24\times 5$$
$$4x = 120 + 40$$
$$4x = 160$$
$$x = 40$$

Realizando las operaciones en forma inversa:

$$40\times\frac{4}{5}-10$$
$$8\times 4 - 10$$
$$32 - 10$$
$$22$$

RESPUESTA: Si las operaciones se realizan en orden inverso, el resultado final es 22.

2) Según los datos del año 2017, la producción de papa del Perú representó el 1,8% de la producción mundial y a la vez representó el 60% de la producción de Sudamérica. Si se sabe que la producción de papa de Sudamérica representó el n% de la producción mundial, determine el valor de n.

SOLUCION:
Planteando la ecuación:
Producción de Sudamérica = n% de la Producción mundial.

Según datos del año 2017:
Producción de papa del Perú = 1,8% de la Producción mundial …(α)
Producción de papa del Perú = 60% de la Producción de Sudamérica …(β)

Igualando ambas ecuaciones: (α) = (β)
1,8% de la Producción Mundial = 60% de la Producción de Sudamérica
18 de la Producción Mundial = 600 de la Producción de Sudamérica
3 de la Producción Mundial = 100 de la Producción de Sudamérica
100 de la Producción de Sudamérica = 3 de la Producción Mundial

$$Producción\ de\ Sudamérica=\frac{3}{100}\ de\ la\ producción\ mundial$$

Producción de Sudamérica = 3% de la Producción mundial.
Por tanto, n = 3

RESPUESTA: El valor de n es igual a 3.

3) La primera etapa de una olimpiada matemática consta de una prueba de 8 problemas. En la siguiente tabla, para cada k entre 0 y 8 (inclusive), se indica cuántos alumnos resolvieron exactamente k problemas. Por ejemplo, 6 alumnos resolvieron exactamente 1 problema y 22 alumnos resolvieron exactamente 4 problemas.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
N° de alumnos que resolvieron k problemas	5	6	8	10	22	13	7	5	2

Para determinar los alumnos que clasificarán a la siguiente etapa, se escoge un número natural n y se hace clasificar a todos los alumnos que resolvieron al menos n problemas. ¿Para qué valor de n se cumple que el número de alumnos clasificados está entre la tercera parte y la mitad del número total de alumnos?

SOLUCION:
Vamos a ordenar los datos en una tabla de distribución de frecuencias:

k	fi	Fi(↓)	Fi(↑)
0	5	5	78
1	6	11	73
2	8	19	67
3	10	29	59
4	22	51	49
5	13	64	27
6	7	71	14
7	5	76	7
8	2	78	2

Donde la frecuencia absoluta (fi) representa el N° de alumnos que resolvieron k problemas.
Fi(↓): Frecuencia relativa acumulada sumando desde arriba hacia abajo.
Fi(↑): Frecuencia relativa acumulada sumando desde abajo hacia arriba.

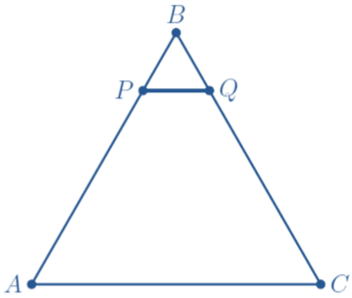
El total de alumnos es 78.
La mitad de los alumnos es: $\frac{78}{2} = 39$ alumnos.
La tercera parte de los alumnos es: $\frac{78}{3} = 26$ alumnos.

Planteando la inecuación:
Tercera parte < N° de alumnos clasificados < Mitad
26 < N° de alumnos clasificados < 39
26 < 27 < 39

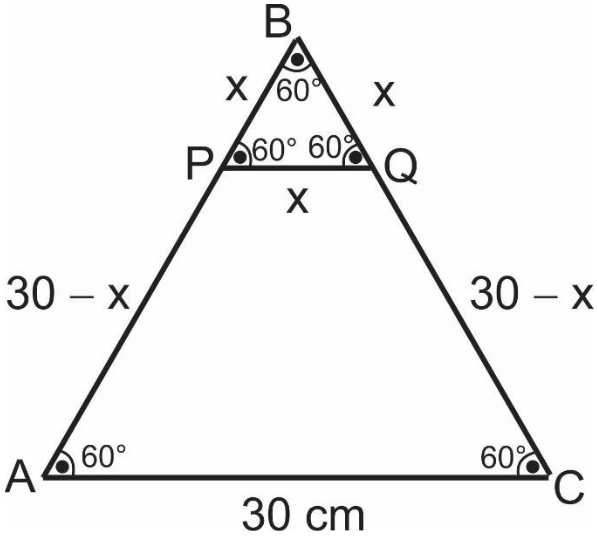
27 estudiantes clasificados están entre la tercera parte y la mitad del número total de alumnos y esto corresponde a los alumnos que resolvieron al menos 5 problemas. Por tanto, n = 5.

RESPUESTA: El valor de n es 5.

4) En la figura mostrada, ABC es un triángulo equilátero de perímetro 90 cm. Además, los segmentos PQ y AC son paralelos. Calcule la suma de los perímetros de los polígonos PBQ y APQC (en cm), si se sabe que estos números están en la relación de 3 a 14.



SOLUCION:
Si el ∆ABC es equilátero y tiene un perímetro de 90 cm, por tanto, cada lado mide 30 cm.
Cada uno de sus ángulos interiores de un triángulo equilátero mide 60°.
Sea PB = x cm y realizamos el siguiente gráfico:



El ∆PBQ también es equilátero porque PQ // AC, en consecuencia PB = BQ = PQ = x.
Además, PA = 30 – x

Plateando la proporción de acuerdo al problema:

$$\frac{Perímetro\ \Delta PBQ}{Perímetro\ \blacksquare APQC} = \frac{3}{14}$$

$$\frac{x + x + x}{30 + 30 - x + 30 - x + x} = \frac{3}{14}$$

$$\frac{3x}{90 - x} = \frac{3}{14}$$

$$14(3x) = 3(90 - x)$$
$$42x = 270 - 3x$$
$$45x = 270$$
$$x = 6$$

Hallando la suma de los perímetros de los polígonos PBQ y APQC (en cm)
Suma de perímetros: ∆PBQ + □APQC
Suma de perímetros: 3x + 90 – x
Suma de perímetros: 3(6) + 90 – 6

Suma de perímetros: 18 + 84
Suma de perímetros: 102 cm

RESPUESTA: La suma de los perímetros de los polígonos PBQ y APQC es 102 cm.

5) Sean a y b números reales tales que $8^a.3^b = 7^8$ y $2^a.9^b = 7^6$. Calcule el valor de 2^a.

SOLUCION:
Despejando 3^b en la primera ecuación:

$$8^a.3^b = 7^8$$
$$3^b = 7^8.8^{-a}$$

Elevando al cuadrado a la expresión anterior:

$$\left(3^b\right)^2 = (7^8 \times 8^{-a})^2$$
$$(3^2)^b = (7^8)^2(8^{-a})^2$$
$$9^b = 7^{16}.8^{-2a}$$

Reemplazando 9^b en la segunda ecuación:

$$2^a.9^b = 7^6$$
$$2^a.(7^{16}.8^{-2a}) = 7^6$$
$$2^a.8^{-2a} = 7^6.7^{-16}$$
$$2^a.(2^3)^{-2a} = 7^{-10}$$
$$2^a.2^{-6a} = 7^{-10}$$
$$2^{-5a} = 7^{-10}$$
$$2^{\frac{-5a}{-5}} = 7^{\frac{-10}{-5}}$$
$$2^a = 7^2$$
$$2^a = 49$$

RESPUESTA: El valor de 2^a es 49.

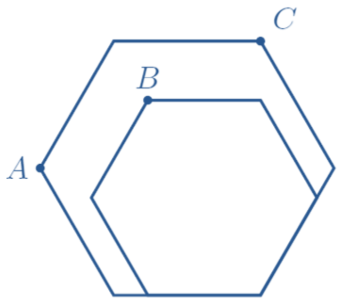
6) Determine el menor número natural N que satisface todas las siguientes condiciones:
- Existen dos dígitos adyacentes de N cuyo producto es 2.
- Existen dos dígitos adyacentes de N cuyo producto es 0.
- Existen dos dígitos adyacentes de N cuyo producto es 1.
- Existen dos dígitos adyacentes de N cuyo producto es 8.

Aclaración: dos dígitos son adyacentes si se encuentran uno al lado de otro.

SOLUCION:
Existen dos dígitos adyacentes de N cuyo producto es 1. Por tanto, el número N empieza con las cifras 1 y 1, porque el producto de ambos números es 1.
Existen dos dígitos adyacentes de N cuyo producto es 2. Por tanto, el número N debe poseer la cifra 2 seguido del 1.
Existen dos dígitos adyacentes de N cuyo producto es 0. Por tanto, el número N debe poseer la cifra 0 y ésta debe ir último porque si no tendríamos otro producto igual a cero.
Existen dos dígitos adyacentes de N cuyo producto es 8. Por tanto, el número N debe poseer la cifra 4 seguido de la cifra 2 porque éstos al multiplicarse resulta 8.
Finalmente: N = 11240.

RESPUESTA: El menor número natural N que satisface todas las condiciones es 11240.

7) Se muestran dos hexágonos regulares, uno dentro del otro. Si los puntos A, B y C pertenecen a una misma recta y el perímetro del hexágono mayor es 120 cm, determine el perímetro del hexágono menor (en cm).



SOLUCION:

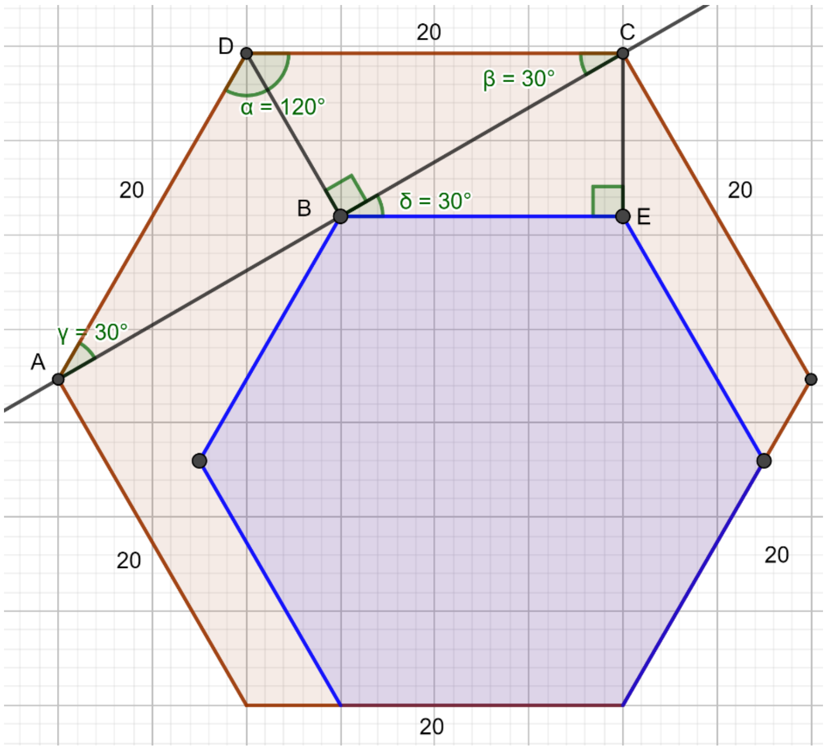
Si el perímetro del hexágono mayor es 120 cm, entonces cada lado mide: $\frac{120}{6}$ = 20 cm.

Medida del ángulo interior de un hexágono regular es: $\frac{180°(n-2)}{n} = \frac{180°(6-2)}{6} = 30°(4) = 120°$

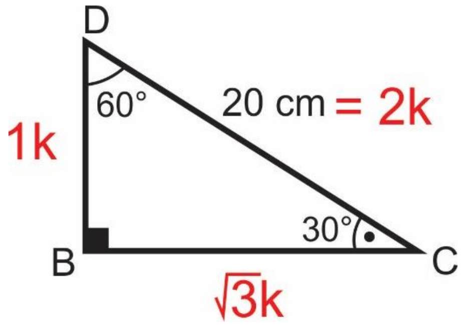
Como son hexágonos regulares, el vértice B es el punto medio del segmento AC.

Como el ∆ADC es isósceles (AD = DC) entonces DB es la altura y bisectriz del ∆ADC.

Entonces m∠CDB = 60°.



El ∆DCB es notable cuyos ángulos interiores son 30° y 60°. Utilizando los lados proporcionales del triángulo notable de 30° y 60°.



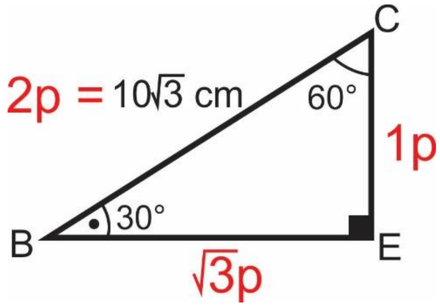
Hallado k

$$20 = 2k$$
$$10 = k$$

Por tanto, BC = $\sqrt{3}k = 10\sqrt{3}$ cm

Como DC // BE, entonces por ángulos alternos internos se cumple: m∠CBE = 30°.
Vamos a trazar el segmento CE, que une dos vértices de los hexágonos regulares y que CE es perpendicular un lado del hexágono regular menor.

El ∆BEC es notable cuyos ángulos interiores son 30° y 60°. Utilizando los lados proporcionales del triángulo notable de 30° y 60°.



Hallado p

$$2p = 10\sqrt{3}$$
$$p = 5\sqrt{3}$$

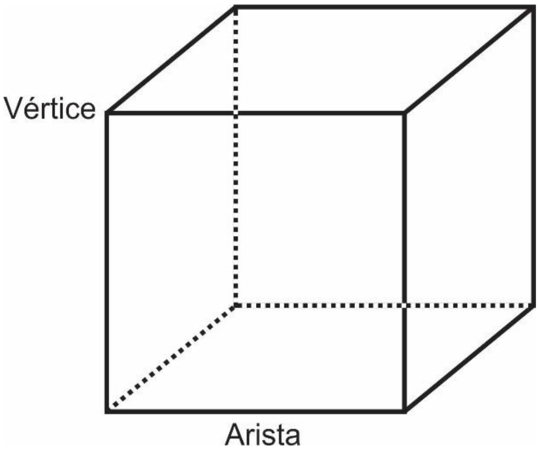
Por tanto, BE = $\sqrt{3}p = \sqrt{3} \times 5\sqrt{3} = 5\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 5 \times 3 = 15$ cm

Finalmente, el perímetro del hexágono regular menor es: 6(15) = 90 cm.

RESPUESTA: El perímetro del hexágono menor es 90 cm.

8) Se escogen al azar dos aristas distintas de un cubo. Se sabe que la probabilidad de que esas dos aristas tengan un extremo en común se puede expresar como a/b, donde a y b son enteros positivos coprimos. Determine el valor de $a + b$.
Aclaración: Considere que todas las aristas tienen la misma probabilidad de ser escogidas.

SOLUCION:
Se tiene el siguiente cubo:



CARACTERÍSTICAS
- Total de vértices: 8
- Total de aristas: 12
- Tres aristas se van intersecar en cada vértice y tendrán un extremo común.

Utilizando la regla de Laplace para hallar la probabilidad de dos aristas tengan un extremo en común:

$$P(A) = \frac{Casos\ favorables\ de\ A}{Total\ casos\ posibles}$$

$$P(2\ aristas\ tengan\ un\ extremo\ en\ común) = \frac{8C_2^3}{C_2^{12}}$$

$$P(2\ aristas\ tengan\ un\ extremo\ en\ común) = \frac{8 \times \frac{3 \times 2}{1 \times 2}}{\frac{12 \times 11}{1 \times 2}}$$

$$P(2\ aristas\ tengan\ un\ extremo\ en\ común) = \frac{24}{66}$$

$$P(2\ aristas\ tengan\ un\ extremo\ en\ común) = \frac{4}{11}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{4}{11}$$

Dos números son coprimos o primos entre si cuando no tienen divisores en común (excepto 1). Por tanto, 4 y 11 son números coprimos, entonces, $a = 4, b = 11$.

Finalmente, $a + b = 4 + 11 = 15$.

RESPUESTA: El valor de $a + b$ es 15.

9) Cada casilla de un tablero de 10x10 se va a pintar de rojo, verde o azul, de tal forma que cada subtablero de 3x3 tenga al menos una casilla de cada uno de los tres colores. ¿Cuántas casillas rojas puede haber como máximo?

SOLUCION:
Encontrando una distribución de las casillas con las condiciones del problema:

R	R	R	R	R	R	R	R	R	R
R	A	V	R	A	V	R	A	V	R
R	R	R	R	R	R	R	R	R	R
R	R	R	R	R	R	R	R	R	R
R	A	V	R	A	V	R	A	V	R
R	R	R	R	R	R	R	R	R	R
R	R	R	R	R	R	R	R	R	R
R	A	V	R	A	V	R	A	V	R
R	R	R	R	R	R	R	R	R	R
R	R	R	R	R	R	R	R	R	R

Donde:

A: Casilla de color azul.
V: Casilla de color verde.
R: Casilla de color rojo.

Casillas de color rojo: 7(10) + 4(3) = 70 + 12 = 82

RESPUESTA: Como máximo se pueden contar con 82 casillas de color rojo.

10) Determine cuántos enteros positivos a cumplen que $a \leq 8575$ y además:

$$mcd(a; 8575) = mcd(a + 1; 8575) = 1.$$

Aclaración: $mcd(r; s)$ denota al máximo común divisor de los enteros positivos r y s.

SOLUCION:

Descomponiendo en sus factores primos $8575 = 5^2 \times 7^3$.
Vamos agrupar números de 35 en 35, porque 35 es múltiplo de 5 y 7.
Probando con los primeros números enteros positivos:

Si a = ? → MCD(a;8575) = 1 ∧ MCD(a +1;8575) = 1.
Si a = 1 → MCD(1;8575) = 1 ∧ MCD(2;8575) = 1. Sí cumple
Si a = 2 → MCD(2;8575) = 1 ∧ MCD(3;8575) = 1. Sí cumple
Si a = 3 → MCD(3;8575) = 1 ∧ MCD(4;8575) = 1. Sí cumple
Si a = 4 → MCD(4;8575) = 1 ∧ MCD(5;8575) = 5. No cumple
Si a = 5 → MCD(5;8575) = 5 ∧ MCD(6;8575) = 1. No cumple
Si a = 6 → MCD(6;8575) = 1 ∧ MCD(7;8575) = 7. No cumple
Si a = 7 → MCD(7;8575) = 7 ∧ MCD(8;8575) = 1. No cumple
Si a = 8 → MCD(8;8575) = 1 ∧ MCD(9;8575) = 1. Sí cumple
Si a = 9 → MCD(9;8575) = 1 ∧ MCD(10;8575) = 5. No cumple
Si a = 10 → MCD(10;8575) = 5 ∧ MCD(11;8575) = 1. No cumple
Si a = 11 → MCD(11;8575) = 1 ∧ MCD(12;8575) = 1. Sí cumple
Si a = 12 → MCD(12;8575) = 1 ∧ MCD(13;8575) = 1. Sí cumple
Si a = 13 → MCD(13;8575) = 1 ∧ MCD(14;8575) = 7. No cumple
Si a = 14 → MCD(14;8575) = 7 ∧ MCD(15;8575) = 5. No cumple Es múltiplo de 5 y 7
Si a = 15 → MCD(15;8575) = 5 ∧ MCD(16;8575) = 1. No cumple
Si a = 16 → MCD(16;8575) = 1 ∧ MCD(17;8575) = 1. Sí cumple
Si a = 17 → MCD(17;8575) = 1 ∧ MCD(18;8575) = 1. Sí cumple
Si a = 18 → MCD(18;8575) = 1 ∧ MCD(19;8575) = 1. Sí cumple
Si a = 19 → MCD(19;8575) = 1 ∧ MCD(20;8575) = 5. No cumple
Si a = 20 → MCD(20;8575) = 5 ∧ MCD(21;8575) = 7. No cumple Es múltiplo de 5 y 7
Si a = 21 → MCD(21;8575) = 7 ∧ MCD(22;8575) = 1. No cumple
Si a = 22 → MCD(22;8575) = 1 ∧ MCD(23;8575) = 1. Sí cumple
Si a = 23 → MCD(23;8575) = 1 ∧ MCD(24;8575) = 1. Sí cumple
Si a = 24 → MCD(24;8575) = 1 ∧ MCD(25;8575) = 25. No cumple
Si a = 25 → MCD(25;8575) = 25 ∧ MCD(26;8575) = 1. No cumple
Si a = 26 → MCD(26;8575) = 1 ∧ MCD(27;8575) = 1. Sí cumple
Si a = 27 → MCD(27;8575) = 1 ∧ MCD(28;8575) = 7. No cumple
Si a = 28 → MCD(28;8575) = 7 ∧ MCD(29;8575) = 1. No cumple
Si a = 29 → MCD(29;8575) = 1 ∧ MCD(30;8575) = 5. No cumple
Si a = 30 → MCD(30;8575) = 5 ∧ MCD(31;8575) = 1. No cumple
Si a = 31 → MCD(31;8575) = 1 ∧ MCD(32;8575) = 1. Sí cumple
Si a = 32 → MCD(32;8575) = 1 ∧ MCD(33;8575) = 1. Sí cumple
Si a = 33 → MCD(33;8575) = 1 ∧ MCD(34;8575) = 1. Sí cumple
Si a = 34 → MCD(34;8575) = 1 ∧ MCD(35;8575) = 35. No cumple Es múltiplo de 5 y 7
Si a = 35 → MCD(35;8575) = 35 ∧ MCD(36;8575) = 1. No cumple Es múltiplo de 5 y 7

Si a = 36 → MCD(36;8575) = 1 ∧ MCD(37;8575) = 1. Sí cumple
Si a = 37 → MCD(37;8575) = 1 ∧ MCD(38;8575) = 1. Sí cumple
Si a = 38 → MCD(38;8575) = 1 ∧ MCD(39;8575) = 1. Sí cumple
Si a = 39 → MCD(39;8575) = 1 ∧ MCD(40;8575) = 5. No cumple
Si a = 40 → MCD(40;8575) = 5 ∧ MCD(41;8575) = 1. No cumple
Si a = 41 → MCD(41;8575) = 1 ∧ MCD(42;8575) = 7. No cumple
Si a = 42 → MCD(42;8575) = 7 ∧ MCD(43;8575) = 1. No cumple
Si a = 43 → MCD(43;8575) = 1 ∧ MCD(44;8575) = 1. Sí cumple
Si a = 44 → MCD(44;8575) = 1 ∧ MCD(45;8575) = 5. No cumple
Si a = 45 → MCD(45;8575) = 5 ∧ MCD(46;8575) = 1. No cumple
Si a = 46 → MCD(46;8575) = 1 ∧ MCD(47;8575) = 1. Sí cumple
Si a = 47 → MCD(47;8575) = 1 ∧ MCD(48;8575) = 1. Sí cumple
Si a = 48 → MCD(48;8575) = 1 ∧ MCD(49;8575) = 49. No cumple
Si a = 49 → MCD(49;8575) = 49 ∧ MCD(50;8575) = 25. No cumple Es múltiplo de 5 y 7
Si a = 50 → MCD(50;8575) = 25 ∧ MCD(51;8575) = 1. No cumple
Si a = 51 → MCD(51;8575) = 1 ∧ MCD(52;8575) = 1. Sí cumple
Si a = 52 → MCD(52;8575) = 1 ∧ MCD(53;8575) = 1. Sí cumple
Si a = 53 → MCD(53;8575) = 1 ∧ MCD(54;8575) = 1. Sí cumple
Si a = 54 → MCD(54;8575) = 1 ∧ MCD(55;8575) = 5. No cumple
Si a = 55 → MCD(55;8575) = 5 ∧ MCD(56;8575) = 7. No cumple Es múltiplo de 5 y 7
Si a = 56 → MCD(56;8575) = 7 ∧ MCD(57;8575) = 1. No cumple
Si a = 57 → MCD(57;8575) = 1 ∧ MCD(58;8575) = 1. Sí cumple
Si a = 58 → MCD(58;8575) = 1 ∧ MCD(59;8575) = 1. Sí cumple
Si a = 59 → MCD(59;8575) = 1 ∧ MCD(60;8575) = 5. No cumple
Si a = 60 → MCD(60;8575) = 5 ∧ MCD(61;8575) = 1. No cumple
Si a = 61 → MCD(61;8575) = 1 ∧ MCD(62;8575) = 1. Sí cumple
Si a = 62 → MCD(62;8575) = 1 ∧ MCD(63;8575) = 7. No cumple
Si a = 63 → MCD(63;8575) = 7 ∧ MCD(64;8575) = 1. No cumple
Si a = 64 → MCD(64;8575) = 1 ∧ MCD(65;8575) = 5. No cumple
Si a = 65 → MCD(65;8575) = 5 ∧ MCD(66;8575) = 1. No cumple
Si a = 66 → MCD(66;8575) = 1 ∧ MCD(67;8575) = 1. Sí cumple
Si a = 67 → MCD(67;8575) = 1 ∧ MCD(68;8575) = 1. Sí cumple
Si a = 68 → MCD(68;8575) = 1 ∧ MCD(69;8575) = 1. Sí cumple
Si a = 69 → MCD(69;8575) = 1 ∧ MCD(70;8575) = 35. No cumple Es múltiplo de 5 y 7
Si a = 70 → MCD(70;8575) = 35 ∧ MCD(71;8575) = 1. No cumple Es múltiplo de 5 y 7
⋮ ⋮ ⋮ ⋮
Si a = 8575 → MCD(8575;8575) = 8575 ∧ MCD(8576;8575) = 1. No cumple

Vamos hallar todos los números que no cumplen con dicha condición:

- Hallando todos los múltiplos de 5 que están comprendidos entre 5 y 8575 (color morado):

$$5 \le \dot{5} \le 8575$$
$$1 \le \dot{5} \le 1715$$

Del 1 al 8575 se pueden contar 1715 múltiplos de 5, pero como al anterior número respecto al múltiplo de 5 se le suma 1, entonces también es múltiplo de 5, por tanto, se podrán contar 2×1715 = 3430 números que no cumplen la condición.

- Hallando todos los múltiplos de 7 que están comprendidos entre 7 y 8575 (color verde):

$$7 \le \dot{7} \le 8575$$
$$1 \le \dot{7} \le 1225$$

Del 1 al 8575 se pueden contar 1225 múltiplos de 7, pero como al anterior número respecto al múltiplo de 7 se le suma 1, entonces también es múltiplo de 7, por tanto, se podrán contar 2×1225 = 2450 números que no cumplen la condición.

- Hallando todos los múltiplos de 35 que están comprendidos entre 35 y 8575:

$$35 \leq \dot{\overline{35}} \leq 8575$$
$$1 \leq \dot{\overline{35}} \leq 245$$

Del 1 al 8575 se pueden contar 245 múltiplos de 35, pero cada 35 números se cuentan dos veces 4 números (color rojo), por tanto, se podrán contar 4×245 = 980 números que no cumplen la condición y se han contado dos veces.

Calculando el total de números que no cumplen la condición:
Total = 3430 + 2450 – 980 = 4900

Calculando el total de números que cumplen la condición:
Total = 8575 – 4900 = 3675

RESPUESTA: 3675 números enteros positivos cumplen con la condición del problema.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN