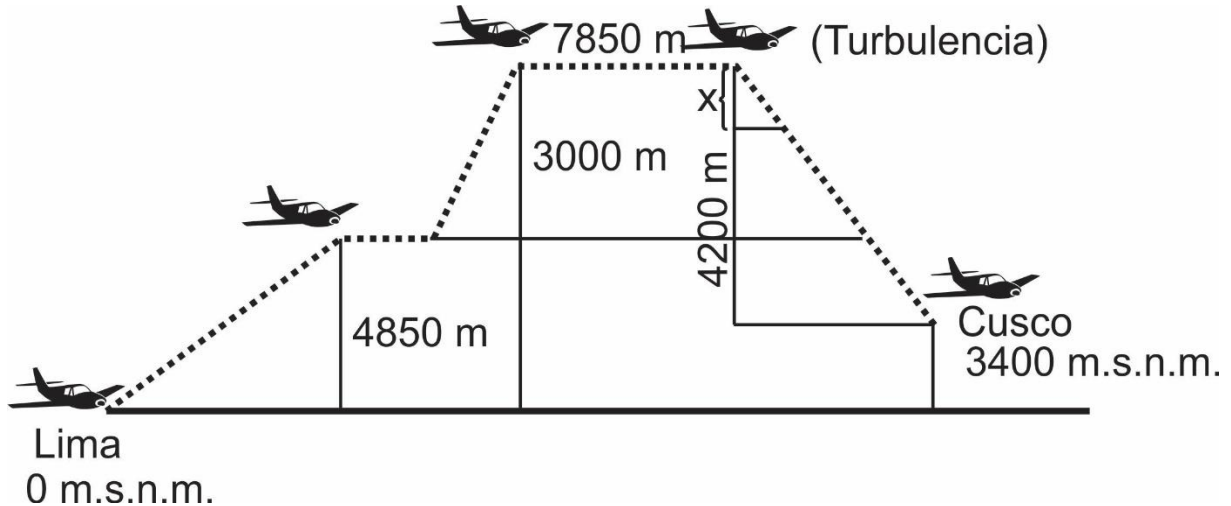


XV Olimpiada Nacional Escolar de Matemática (ONEM 2018)
Segunda Fase - Nivel 1 – Solucionario.

- 1) Un avión realizó un viaje desde Lima (que se encuentra al nivel del mar) a Cusco. Después de despegar, el avión alcanzó una altura de 4850 m y voló varios minutos a esa altura. Luego, se elevó 3000 m más y se mantuvo volando a la misma altura hasta que hubo turbulencias. Debido a este problema, el avión tuvo que descender algunos metros. Finalmente, descendió 4200 metros hasta llegar a Cusco. Si se sabe que Cusco se encuentra a 3400 m sobre el nivel del mar, ¿Cuántos metros descendió el avión debido a las turbulencias?

SOLUCION:

Graficando el recorrido del avión:



Sea "x" la altura que descendió el avión luego de las turbulencias. La altura máxima que voló el avión fue $4850 \text{ m} + 3000 \text{ m} = 7850 \text{ m}$. con ello podemos plantear la siguiente ecuación:

$$4200 + 3400 + x = 7850$$

$$7600 + x = 7850$$

$$x = 250$$

RESPUESTA: El avión descendió 250 m debido a las turbulencias.

- 2) El promedio de las edades de 5 personas es 22. Si se retira Liliana, que es una de esas personas, el promedio de las edades de las que quedan es 19. ¿Cuál es la edad de Liliana?

SOLUCION:

El promedio de las edades de 5 personas es 22.

$$\frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5}{5} = 22$$

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 22(5)$$

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 110$$

El promedio de las edades de 4 personas es 19 (Si se retira Liliana):

$$\frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{4} = 19$$

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 19(4)$$

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 76$$

Asumiendo que la persona cinco es Liliana, es decir: $P_5 = x$.

Reemplazando $P_1 + P_2 + P_3 + P_4$ en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}
 P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 &= 110 \\
 P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + x &= 110 \\
 76 + x &= 110 \\
 x &= 110 - 76 \\
 x &= 34
 \end{aligned}$$

RESPUESTA: La edad de Liliana es 34 años.

3) Determine el menor número natural N que satisface las siguientes dos condiciones:

- Existen dos dígitos adyacentes de N cuya suma es 13.
- Existen dos dígitos adyacentes de N cuya suma es 12.

Aclaración: Dos dígitos son adyacentes si se encuentran uno al lado de otro.

SOLUCION:

Sea el menor número natural de tres cifras: $N = \overline{abc}$ (Se ha escogido tres cifras porque se trata de encontrar al número más pequeño)

Dos dígitos adyacentes de N cuya suma sea 13.

$$b + c = 13$$

Dos dígitos adyacentes de N cuya suma sea 12.

$$a + b = 12$$

Vamos a tantear con ésta última expresión ya que es la menor suma:

$$a + b = 12$$

$$6 + 6 = 12 \quad \rightarrow \quad a = 6, b = 6, c = 7$$

$$5 + 7 = 12 \quad \rightarrow \quad a = 5, b = 7, c = 6$$

$$4 + 8 = 12 \quad \rightarrow \quad a = 4, b = 8, c = 5$$

$$3 + 9 = 12 \quad \rightarrow \quad a = 3, b = 9, c = 4$$

El menor número encontrado es 394.

RESPUESTA: El menor número natural que satisface las dos condiciones es 394.

4) El precio de la entrada de un circo se redujo en 10%. Debido a este cambio, el número de asistentes se incrementó en n%. Determine el valor de “n”, si se sabe que el ingreso total por asistencia se incrementó en 26%.

SOLUCION:

Sea “x” el número de personas que entraron al circo al inicio.

Se “y” el precio de cada entrada al circo al inicio. Si el precio de la entrada se reduce en 10% entonces se tendrá: $y - 10\%y = 100\%y - 10\%y = 90\%y$

	Precio de cada entrada	Número de personas
Inicio	y	x
Final	90%y	x + n%x

Si el ingreso total por asistencia se incrementó en 26%, significa que se tendrá: $100\% + 26\% = 126\%$. El monto recaudado se obtiene al multiplicar el número de personas por el precio de cada entrada.

Plateando la ecuación, teniendo en cuenta los montos recaudados al inicio y al final

$$\begin{aligned}
 \frac{(x + n\%x)(90\%y)}{xy} &= 126\% \\
 \frac{x(1 + n\%)(90\%y)}{xy} &= 126\%
 \end{aligned}$$

Cancelamos los factores “x” e “y”.

$$(1+n\%)(90\%) = 126\%$$

$$\left(1 + \frac{n}{100}\right) \times \frac{90}{100} = \frac{126}{100}$$

$$\left(\frac{100+n}{100}\right) \times \frac{90}{100} = \frac{126}{100}$$

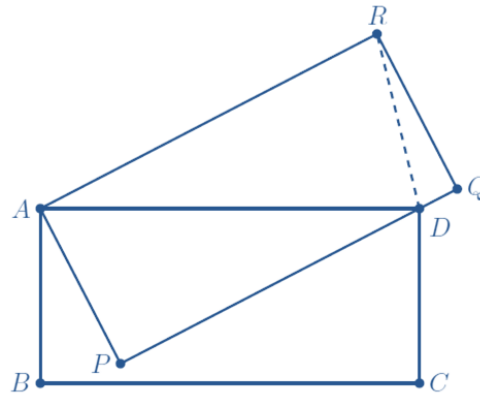
$$100 + n = \frac{126 \times 100 \times 100}{100 \times 90}$$

$$100 + n = 140$$

$$n = 40$$

RESPUESTA: El valor de n es 40

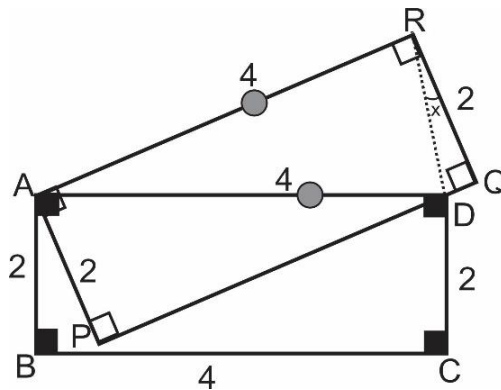
- 5) Se muestran dos rectángulos $ABCD$ y $APQR$ tales que $AB = AP = 2$ y $BC = PQ = 4$. Determine la medida del ángulo $\angle DRQ$.



SOLUCION:

Completando los datos de acuerdo al problema planteado:

Sea $\angle DRQ = x$



El $\triangle APD$ es rectángulo y vamos hallar el lado PD utilizando el Teorema de Pitágoras:

$$AP^2 + PD^2 = AD^2$$

$$2^2 + PD^2 = 4^2$$

$$4 + PD^2 = 16$$

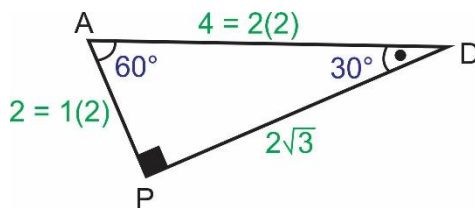
$$PD^2 = 16 - 4$$

$$PD^2 = 12$$

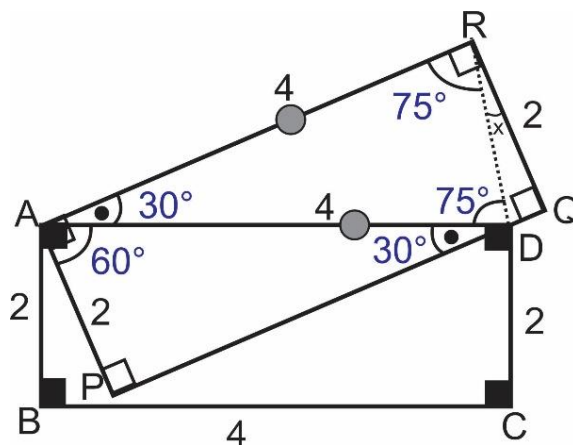
$$PD = \sqrt{12}$$

$$PD = 2\sqrt{3}$$

El $\triangle APD$ es notable cuyos lados proporcionales corresponden a los lados de un \triangle de 30° y 60°



Vamos a completar los demás ángulos para hallar el ángulo x .



$m\angle RAD = 30^\circ$ porque es el complemento del $m\angle PAD$.

El $\triangle RAD$ es isósceles ($AR = AD = 4$), Si $m\angle RAD = 30^\circ$, entonces $m\angle ARD = m\angle RDA = 75^\circ$.

Finalmente, $m\angle ARD$ y x son complementarios, por lo que se cumple:

$$\begin{aligned} m\angle ARD + x &= 90^\circ \\ 75^\circ + x &= 90^\circ \\ x &= 15^\circ \end{aligned}$$

RESPUESTA: La medida del ángulo DRQ es 15° .

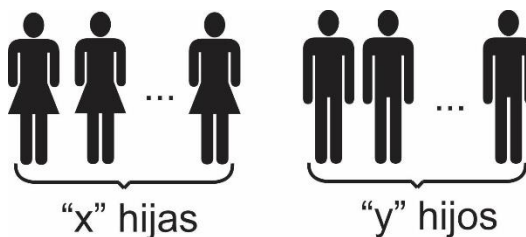
- 6) Jacob tiene hijos e hijas. Cierta día, Jacob hizo la siguiente pregunta a cada hijo y cada hija: ¿Cuántas hermanas tienes?. La respuesta de cada uno fue un número positivo y la suma de todos estos números fue 35. ¿Cuántas hijas tiene Jacob?

SOLUCION:

Sea “ x ” el número de hijas de Jacob.

Sea “ y ” el número de hijos de Jacob.

Planteando el problema:



Cada hija tiene “ $x - 1$ ” hermanas y el total de respuestas respecto al número de hermanas será: $(x - 1)x$.

Cada hijo tiene “ x ” hermanas y el total de respuestas respecto al número de hermanas será: xy .

La suma de todos estos números fue 35, planteando la ecuación tenemos:

$$\begin{aligned} x(x-1) + xy &= 35 \\ x(x-1+y) &= 5(7) \\ x=5, \quad x-1+y &= 7 \\ x=5, \quad 5-1+y &= 7 \\ x=5, \quad 4+y &= 7 \\ x=5, \quad y &= 3 \end{aligned}$$

RESPUESTA: Jacob tiene 5 hijas.

- 7) Si: $2018 = a^4 + b^4 + c^4 + d^4$, donde a, b, c y d , son números enteros positivos distintos, calcule el valor de $a + b + c + d$.

SOLUCION:

Hallando los primeros números con exponente cuatro.

$$1^4 = 1$$

$$2^4 = 16$$

$$3^4 = 81$$

$$4^4 = 256$$

$$5^4 = 625$$

$$6^4 = 1296$$

$$7^4 = 2401 \text{ (} 7^4 \text{ queda descartado porque es mayor que 2018)}$$

Los números son distintos y vamos a sumar algunos de ellos para que el resultado sea 2018.

$$16 + 81 + 625 + 1296 = 2018$$

$$2^4 + 3^4 + 5^4 + 6^4 = 2018$$

Por tanto, la suma de los números es: $2 + 3 + 5 + 6 = 16$.

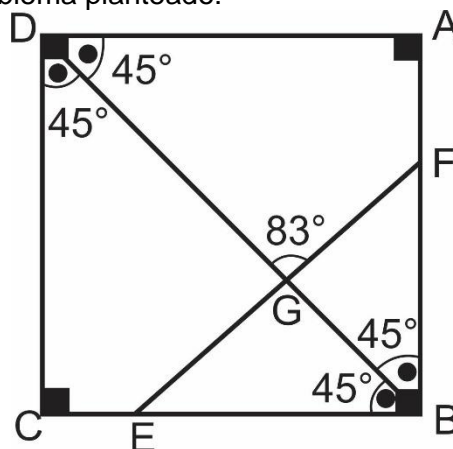
RESPUESTA: El valor de $a + b + c + d$ es 16.

- 8) Luisa dibujó en su cuaderno un cuadrado ABCD y trazó la diagonal BD. Luego, trazó un segmento que une un punto del lado AB con un punto del lado BC. De esta forma el cuadrado quedó dividido en cuatro partes: dos triángulos y dos cuadriláteros. Se sabe que un ángulo interior de uno de los cuadriláteros mide 83° , determine la medida del mayor ángulo interior del otro cuadrilátero.

SOLUCION:

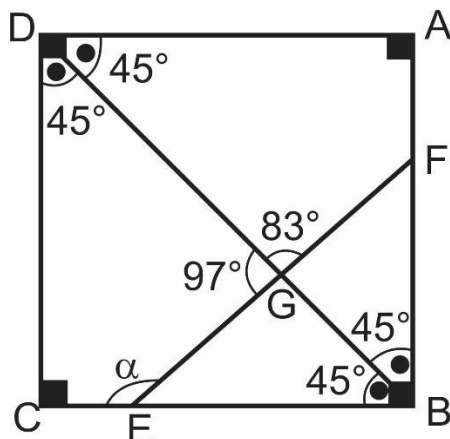
En un cuadrado, la diagonal es la bisectriz del ángulo recto.

Graficando de acuerdo al problema planteado:



$$m\angle DGE = 180^\circ - 83^\circ = 97^\circ$$

Sea el ángulo $\angle CEG = \alpha$



En el cuadrilátero DGEC, vamos hallar α .

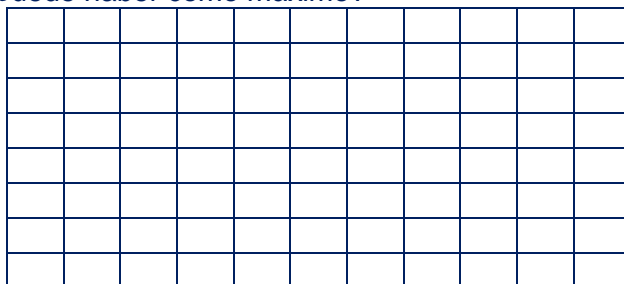
$$45^\circ + 97^\circ + 90^\circ + \alpha = 360^\circ$$

$$232^\circ + \alpha = 360^\circ$$

$$\alpha = 128^\circ$$

RESPUESTA: La medida del mayor ángulo interior del otro cuadrilátero es 128° .

- 9) Cada casilla de un tablero de 8×11 se va a pintar de rojo, verde o azul, de tal forma que cada subtablero de 2×2 tenga al menos una casilla de cada uno de los tres colores. ¿Cuántas casillas rojas puede haber como máximo?



SOLUCION:

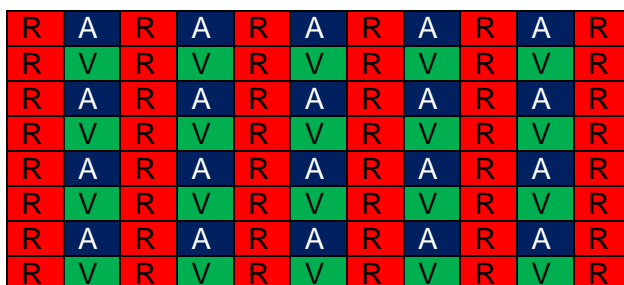
Encontrando un patrón con las condiciones del problema:



A: Casilla de color azul.

V: Casilla de color verde.

R: Casilla de color rojo.



Casillas de color rojo: $8 \times 6 = 48$.

Casillas de color azul: $5 \times 4 = 20$.

Casillas de color verde: $5 \times 4 = 20$.

RESPUESTA: Como máximo se puede contar con 48 casillas de color rojo.

10) Determine cuántos números capicúas de cinco dígitos son múltiplos de 11.

Aclaración: Un número capicúa es aquel que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Por ejemplo, 11; 101 y 2772 son números capicúas.

SOLUCION:

Número capicúa de cinco cifras: \overline{abcba}

Se sabe que un número es divisible por once cuando se le multiplica por +1 a los lugares impares y por -1 a los lugares pares. Es decir:

$$\begin{array}{r} \overline{abcba} = \overline{11} \\ +- ++ \\ a - b + c - b + a = \overline{11} \\ 2a - 2b + c = \overline{11} \end{array}$$

Para esta situación problemática los múltiplos de 11 son: 0; 11; -11 y 22

PRIMER CASO: Cuando el múltiplo de once es cero (0).

$$2a - 2b + c = 0$$

Probemos cuando $c = 0$:

$$2a - 2b + 0 = 0$$

$$2a - 2b = 0$$

$$2a = 2b$$

$$a = b$$

a no puede tomar el valor de cero por ser el primer dígito. En consecuencia, a puede tomar los valores del 1 al 9. Por tanto, los números serían: 11011; 22022; 33033; 44044; 55055; 66066; 77077; 88088 y 99099. **Total: 9 números.**

Probemos cuando $c = 2$, ya que c no puede tomar valores impares.

$$2a - 2b + 2 = 0$$

$$2a + 2 = 2b$$

$$a + 1 = b$$

a puede tomar los valores del 1 al 8, no puede tomar el valor de 9 porque más uno tendría dos dígitos. Por tanto, los números serían: 12221; 23232; 34243; 45254; 56265; 67276; 78287 y 89298. **Total: 8 números.**

Probemos cuando $c = 4$:

$$2a - 2b + 4 = 0$$

$$2a + 4 = 2b$$

$$a + 2 = b \text{ (Sacando mitad a la expresión anterior)}$$

a puede tomar los valores del 1 al 7, no puede tomar el valor de 8 y 9 porque más uno tendríamos dos dígitos. Por tanto, los números serían: 13431; 24442; 35453; 46464; 57475; 68486 y 79497. **Total: 7 números.**

Y así sucesivamente...

Cuando $c = 6$. **Total: 6 números.** Los números son: 14641; 25652; 36663; 47674; 58685 y 69696.

Cuando $c = 8$. **Total: 5 números.** Los números son: 15851; 26862; 37873; 48884 y 59895.

SEGUNDO CASO: Cuando el múltiplo de once es once (11).

$$2a - 2b + c = 11$$

Probemos cuando $c = 1$, c no puede tomar valores pares:

$$2a - 2b + 1 = 11$$

$$2a - 2b = 10$$

$$a - b = 5$$

$$a = b + 5$$

b puede tomar los valores del 0 al 4. Por tanto, los números serían: 50105; 61116; 72127; 83138 y 94149. **Total: 5 números.**

Probemos cuando $c = 3$:

$$2a - 2b + 3 = 11$$

$$2a - 2b = 8$$

$$a - b = 4$$

$$a = b + 4$$

b puede tomar los valores del 0 al 5. Por tanto, los números serían: 40304; 51315; 62326; 73137; 84348 y 95359. **Total: 6 números.**

Probemos cuando $c = 5$:

$$2a - 2b + 5 = 11$$

$$2a - 2b = 6$$

$$a - b = 3$$

$$a = b + 3$$

b puede tomar los valores del 0 al 6. Por tanto, los números serían: 30503; 41514; 52525; 63536; 74547; 85558 y 96569. **Total: 7 números.**

Probemos cuando $c = 7$:

$$2a - 2b + 7 = 11$$

$$2a - 2b = 4$$

$$a - b = 2$$

$$a = b + 2$$

b puede tomar los valores del 0 al 7. Por tanto, los números serían: 20702; 31713; 42724; 53735; 64746; 75757; 86768 y 97779. **Total: 8 números.**

Probemos cuando $c = 9$:

$$2a - 2b + 9 = 11$$

$$2a - 2b = 2$$

$$a - b = 1$$

$$a = b + 1$$

b puede tomar los valores del 0 al 8. Por tanto, los números serían: 10901; 21912; 32923; 43934; 54945; 65956; 76967; 87978 y 98989. **Total: 9 números.**

TERCER CASO: Cuando el múltiplo de once es menos once (-11).

$$2a - 2b + c = -11$$

Probemos cuando $c = 1$, c no puede tomar valores pares:

$$2a - 2b + 1 = -11$$

$$2a - 2b = -12$$

$$2b - 2a = 12$$

$$b - a = 6$$

$$b = a + 6$$

a puede tomar los valores del 1 al 3. Por tanto, los números serían: 17171; 28182 y 39193. **Total: 3 números.**

Probemos cuando $c = 3$, c no puede tomar valores pares:

$$2a - 2b + 3 = -11$$

$$2a - 2b = -14$$

$$2b - 2a = 14$$

$$b - a = 7$$

$$b = a + 7$$

a puede tomar los valores del 1 al 2. Por tanto, los números serían: 18381 y 29392. **Total: 2 números.**

Cuando $c = 5$. **Total: 1 número.** El número es: 19591.

CUARTO CASO: Cuando el múltiplo de once es veintidós (22).

$$2a - 2b + c = 22$$

Probemos cuando $c = 4$, $c \geq 4$:

$$2a - 2b + 4 = 22$$

$$2a - 2b = 18$$

$$a - b = 9$$

$$a = b + 9$$

b puede tomar sólo cero (0). Por tanto, el número es: 90409. **Total: 1 número.**

Probemos cuando $c = 6$:

$$2a - 2b + 6 = 22$$

$$2a - 2b = 16$$

$$a - b = 8$$

$$a = b + 8$$

b puede tomar los valores del 0 al 1. Por tanto, los números serían: 80608 y 91619. **Total: 2 números.**

Probemos cuando $c = 8$:

$$2a - 2b + 8 = 22$$

$$2a - 2b = 14$$

$$a - b = 7$$

$$a = b + 7$$

b puede tomar los valores del 0 al 2. Por tanto, los números serían: 70807; 81818 y 92829. **Total: 3 números.**

Sumando la cantidad de números encontrados por cada caso:

$$\text{PRIMER CASO: } 9 + 8 + 7 + 6 + 5 = 35$$

$$\text{SEGUNDO CASO: } 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 35$$

$$\text{TERCER CASO: } 3 + 2 + 1 = 6$$

$$\text{CUARTO CASO: } 1 + 2 + 3 = 6$$

$$\text{TOTAL: } 35 + 35 + 6 + 6 = 82.$$

RESPUESTA: 82 números capicúas de cinco dígitos son múltiplos de 11.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN