XV Olimpiada Nacional Escolar de Matemática (ONEM 2018)
Primera Fase - Nivel 3 – Solucionario.

1) Un cocinero compró el día de ayer 12 kg de limón y pagó S/48. ¿Cuánto pagaría hoy si quiere comprar 20 kg y el costo del limón se incrementó en 10 %?

A) S/ 88 B) S/ 110 C) S/ 90 D) S/ 77 E) S/ 80

SOLUCION:

Precio del limón por kilogramo = $\frac{S/\,48}{12} = S/\,4$

Se desea comprar 20 kg de limón: 20(S/ 4) = S/ 80
El costo del limón se incrementó en 10%: 110%(80) = 11(8) = S/ 88.

RESPUESTA: Si quiere comprar 20 kg de limón se pagaría S/ 88. **CLAVE A.**

2) Carlos tiene cuatro tarjetas (llamadas P, Q, R y S) y cada una contiene un número de dos dígitos:

P	Q	R	S
23	**55**	**36**	**96**

Carlos quiere obtener un número par de 8 dígitos y que sea lo mayor posible, ¿En qué orden debe ubicar las tarjetas?

A) SQRP B) SQPR C) PQRS D) QSPR E) SPQR

SOLUCION:
Para obtener un número par y que sea lo mayor posible, la tarjeta R tiene que ir en el extremo derecho y la tarjeta S en el extremo izquierdo, seguidamente la tarjeta Q y P, es decir: SQPR, formando el número: 96 55 23 36.

RESPUESTA: Carlos debe ubicar las tarjetas en el siguiente orden: SQPR. **CLAVE B.**

3) Alex tiene 2k palitos idénticos. Con k palitos puede formar el borde de un cuadrado y con los otros k palitos puede formar el borde de un hexágono regular. Si en ningún caso fue necesario que Alex rompa algún palito, entonces podemos asegurar que k es múltiplo de ...

A) 24 B) 9 C) 8 D) 16 E) 12

SOLUCION:
Alex tiene: 2k palitos idénticos.

"k" palitos puede formar el borde de un cuadrado
Al formar un cuadrado, el perímetro será: 4(k/4), es decir, un múltiplo de 4.

"k" palitos puede formar el borde de un hexágono regular.
Al formar un hexágono regular, el perímetro será: 6(k/6), es decir, un múltiplo de 6.

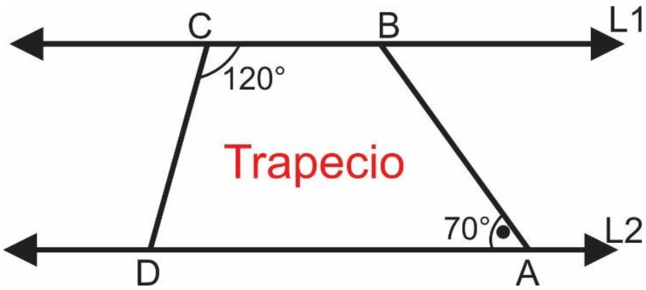
Para que se pueda construir dichos polígonos regulares y sin romper ningún palito, necesariamente k tiene que ser simultáneamente múltiplo del MCM (Mínimo común múltiplo) de 4 y 6. Entonces, k = MCM(4;6) = 12. Por tanto, k es múltiplo de 12.

RESPUESTA: k es múltiplo de 12. **CLAVE E.**

4) Dos ángulos interiores de un trapecio miden 70° y 120°. Calcule la diferencia de las medidas de los otros dos ángulos interiores.

A) 90° B) 70° C) 50° D) 80° E) 10°

SOLUCION:
Graficando el trapecio con los ángulos dados:



Por propiedad, los trapecios tienen únicamente dos lados paralelos (DA // CB), por lo que, dos ángulos comprendidos entre los lados paralelos son suplementarios:

$$120° + m\angle CDA = 180°$$
$$m\angle CDA = 180° - 120°$$
$$m\angle CDA = 60°$$

También se cumple:

$$70° + m\angle CBA = 180°$$
$$m\angle CBA = 180° - 70°$$
$$m\angle CBA = 110°$$

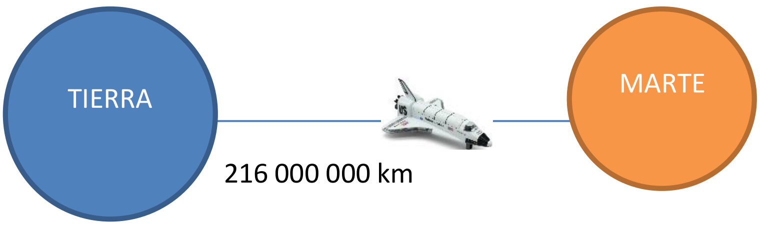
Hallando la diferencia de las medidas de los ángulos hallados: $110° - 60° = 50°$.

RESPUESTA: La diferencia de las medidas de los otros dos ángulos interiores del trapecio es 50°. **CLAVE C**.

5) El Curiosity es un vehículo explorador que se encuentra actualmente en Marte. Cuando este vehículo se encontraba a 216 millones de kilómetros de la Tierra, emitió una señal. ¿Cuántos minutos se demora en llegar la señal al Centro de datos de la NASA en la Tierra, si ésta viaja a una velocidad de 300 000 kilómetros por segundo?

A) 12 B) 9 C) 7,2 D) 8 E) 15

SOLUCION:
Graficando se tiene:



Asumiendo de que se trata de un movimiento rectilíneo uniforme (MRU), el tiempo se define como:

$$Tiempo = \frac{Distancia}{Velocidad}$$

Hallando el tiempo:

$$t = \frac{216\ 000\ 000\ km}{300\ 000\ km/s}$$

$$t = \frac{2160\ s}{3}$$

$$t = 720\ s$$

Convirtiendo el tiempo a minutos

$$720\ s \times \frac{1\ min}{60\ s} = 12\ min$$

RESPUESTA: La señal llegará en 12 minutos al centro de datos de la NASA. **CLAVE A.**

6) En una bodega hay tres cajas cuyos contenidos son los siguientes:
- Primera caja: 20 latas de leche y 30 latas de atún.
- Segunda caja: 18 latas de leche y 33 latas de atún.
- Tercera caja: n latas de leche.

Si se sabe que las tres cajas pesan lo mismo, determine el valor de n.

A) 42 B) 30 C) 45 D) 40 E) 43

SOLUCION:
Sea “x” la masa de cada lata de leche.
Sea “y” la masa de cada lata de atún.
Como las tres cajas pesan lo mismo, entonces se cumple:

$$20x + 30y = 18x + 33y = nx$$

Igualando las dos primeras ecuaciones:

$$20x + 30y = 18x + 33y$$
$$20x - 18x = 33y - 30y$$
$$2x = 3y$$
$$\frac{2x}{3} = y$$

Igualando las dos últimas ecuaciones:

$$18x + 33y = nx$$
$$18x + 33\left(\frac{2x}{3}\right) = nx$$
$$18x + 22x = nx$$
$$40x = nx$$
$$40 = n$$

RESPUESTA: El valor de n es 40. **CLAVE D.**

7) Un juego es llamado justo si la probabilidad de ganar es igual a la probabilidad de perder. ¿Cuántos de los siguientes juegos (que involucran todos lanzar un dado usual de 6 caras) son justos?
- Juego 1: "Ganas si obtienes el número 4"
- Juego 2: "Ganas si obtienes un número par"
- Juego 3: "Ganas si obtienes un número mayor que 3"
- Juego 4: “Ganas si obtienes un número que es múltiplo de 3"

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

SOLUCION:

De acuerdo al problema, un juego es justo si la probabilidad de ganar es igual a la probabilidad de perder: *P(Ganar) = P(Perder)*.

Analizando cada caso:

- Juego 1: "Ganas si obtienes el número 4". $P(Ganar) = P(4) = \frac{1}{6}$. $P(Perder) = \frac{5}{6}$.
  Como: $P(Ganar) \neq P(Perder)$. Por tanto, el juego no es justo.
- Juego 2: "Ganas si obtienes un número par". $P(Ganar) = P(Par) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. $P(Perder) = \frac{1}{2}$.
  Como: $P(Ganar) = P(Perder)$. Por tanto, el juego es justo.
- Juego 3: "Ganas si obtienes un número mayor que 3". $P(Ganar) = P(número>3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. $P(Perder) = \frac{1}{2}$. Como: $P(Ganar) = P(Perder)$. Por tanto, el juego es justo.
- Juego 4: "Ganas si obtienes un número que es múltiplo de 3". $P(Ganar) = P(\dot{3}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. $P(Perder) = \frac{2}{3}$. Como: $P(Ganar) \neq P(Perder)$. Por tanto, el juego no es justo.

RESPUESTA: Sólo dos juegos son justos. **CLAVE C.**

8) Al hacer una encuesta a un grupo de once personas acerca del número de hermanos que tienen, resultó que la media y la moda de las respuestas obtenidas es igual a 2. Se sabe también que exactamente cuatro personas respondieron 3 y que ninguna respondió un número mayor que 3. ¿Cuántas personas respondieron 1?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) Ninguna

SOLUCION:

De acuerdo a los datos: $\bar{x} = 2$. Mo = 2

Cuatro personas respondieron 3.

Sea "n" el número de personas que respondieron 1.

Ninguna persona respondió un número mayor que 3, es decir, sólo respondieron 1; 2 ó 3.

Hallando el número de personas que respondieron 2:

$$(N°1) + (N°2) + (N°3) = 11$$
$$n + (N°2) + 4 = 11$$
$$(N°2) = 11 - 4 - n$$
$$(N°2) = 7 - n$$

Utilizando la definición de promedio:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11}}{11} = 2$$

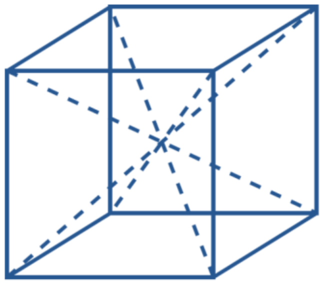
$$\frac{n(1) + (7 - n)(2) + 4(3)}{11} = 2$$

$$n + 14 - 2n + 12 = 22$$
$$-n + 26 = 22$$
$$26 - 22 = n$$
$$4 = n$$

Aparentemente la respuesta es 4, pero no, porque si nosotros reemplazamos en la cantidad de personas que respondieron 2, tendríamos: $(N°2) = 7 - n = 7 - 4 = 3$. Lo cual se contradice ya que la moda es 2. Ahora, si "n" toma los valores de: $n = 3$; $n = 2$; $n = 1$; $n = 0$, en ninguno de ellos la media es 2.

RESPUESTA: Ninguna de las alternativas tomaría el número de personas que respondieron que tienen un hermano. **CLAVE E.**

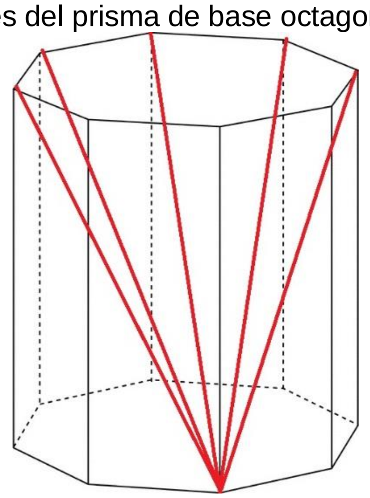
9) Una diagonal interior de un poliedro es un segmento que une dos vértices del poliedro de tal forma que dicho segmento no está incluido en una cara del poliedro. Por ejemplo, un tetraedro no tiene diagonales interiores, mientras que un cubo tiene 4 diagonales interiores, como se muestra en la siguiente figura.



¿Cuántas diagonales interiores tiene un prisma recto cuyas bases son octágonos?

A) 64 B) 40 C) 56 D) 8 E) 16

SOLUCION:
Trazando las diagonales interiores del prisma de base octagonal:



De cada vértice sólo se puede trazar 5 diagonales interiores, como la base octagonal tiene 8 vértices, por tanto, en total se podrán trazar: 5(8) = 40 diagonales interiores.

RESPUESTA: En un prisma recto de base octagonal se pueden trazar 40 diagonales interiores en total. **CLAVE B**.

10) La suma de las edades de tres hermanos es 47. Si sus edades son distintas, ¿Cuál es el mayor valor posible de la edad del hermano menor?

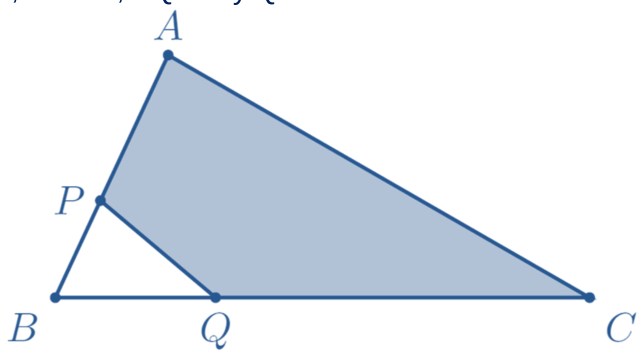
A) 16 B) 13 C) 17 D) 14 E) 15

SOLUCION:
Sean las edades de los tres hermanos: $x; y; z$
Sus edades son distintas: $x \neq y \neq z$. asumiendo que: $x < y < z$
La suma de las edades de los tres hermanos es 47:
$x + y + z = 47$.
Probando con los menores números:
$0 + 1 + 46 = 47$ ¡Cumple!, 0 años puede ser la edad del hermano menor.
$1 + 2 + 44 = 47$ ¡Cumple!, 1 año puede ser la edad del hermano menor.
$2 + 3 + 42 = 47$ ¡Cumple!, 2 años puede ser la edad del hermano menor.
$3 + 4 + 40 = 47$ ¡Cumple!, 3 años puede ser la edad del hermano menor.
$4 + 5 + 38 = 47$ ¡Cumple!, 4 años puede ser la edad del hermano menor.
$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

13 + 14 + 20 = 47	¡Cumple!, 13 años puede ser la edad del hermano menor.
14 + 15 + 18 = 47	¡Cumple!, 14 años puede ser la edad del hermano menor.
15 + 16 + 16 = 47	¡No cumple! Porque dos hermanos tienen la misma edad.

RESPUESTA: A lo más el hermano menor puede tener 14 años. **CLAVE D.**

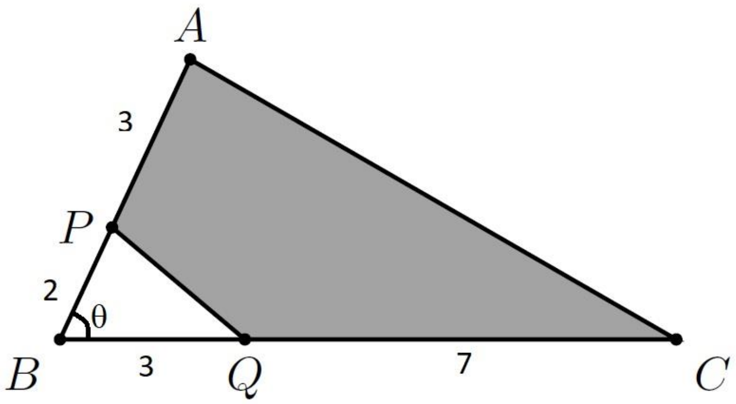
11) Sandra dibujó un triángulo ABC. Luego, ubicó los puntos P y Q, como se muestra en la figura, de tal forma que BP = 2, PA = 3, BQ = 3 y QC = 7.



¿Qué porcentaje del área del triángulo ABC representa el área de la región sombreada?

A) 84% B) 88% C) 90% D) 75% E) 66%

SOLUCION:
Completando los datos se tiene:



El área de un triángulo (Fórmula trigonométrica):

$$A\Delta = \frac{a \times b \times Sen\theta}{2}$$

El área sombreada (As) está dado por:

$$As = A\Delta ABC - A\Delta PBQ$$

$$As = \frac{5 \times 10 \times Sen\theta}{2} - \frac{2 \times 3 \times Sen\theta}{2}$$

$$A\Delta = 25Sen\theta - 3Sen\theta$$

$$A\Delta = 22Sen\theta$$

Hallando el porcentaje (Relación parte todo).

$$x = \frac{As}{A\Delta ABC}$$

$$x = \frac{22Sen\theta \times 100\%}{25Sen\theta}$$

$$x = 22 \times 4\% = 88\%$$

RESPUESTA: El área de la región sombreada representa el 88% del área del $\triangle$ABC.

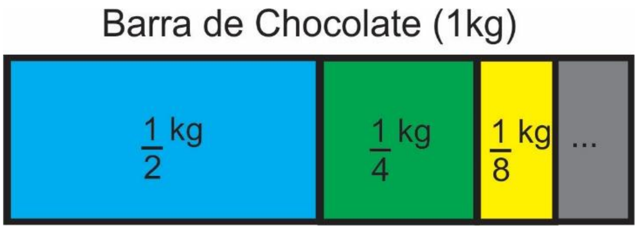
CLAVE B.

12) A Javier le han regalado un gran chocolate que pesa 1 kg. Él decide consumirlo de la siguiente manera: El primer día consumiría la mitad del chocolate; el segundo día, la mitad de lo que queda y así sucesivamente. La expresión que representa el consumo del chocolate durante los primeros n días es:

A) $\frac{n}{2}$ kg B) $\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$ kg C) $\frac{1}{2^n}$ kg D) $\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$ kg E) $\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$ kg

SOLUCION:

Graficando se tiene:



1er día consume: $\frac{1}{2}$ kg

2do día consume: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ kg

3er día consume: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ kg

4to día consume: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$ kg

⋮ ⋮ ⋮

"n" día consume: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \ldots \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}$

Sumando lo consumido:

$$S = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

La sumatoria de una progresión geométrica se define por:

$$S = \frac{t_1(1-q^n)}{1-q}$$

Donde: t_1 = primer término, q = razón geométrica. Reemplazando se tiene:

$$S = \frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}$$

$$S = \frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{\frac{1}{2}}$$

$$S = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$S = 1-\frac{1}{2^n}$$

RESPUESTA: La expresión que representa el consumo del chocolate durante los primeros n días es: $\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$ **CLAVE B**.

13) Una empresa de celulares ofrece tres planes de servicio: Básico, intermedio y completo. En el mes de enero la distribución de clientes por plan fue la mostrada en la Tabla 1. En el mes de febrero, entraron 400 nuevos clientes al plan básico, algunos del plan basico se cambiaron al plan intermedio y algunos del plan intermedio se cambiaron al plan completo. Ningún cliente se retiró. La distribución de los clientes en el mes de febrero fue la mostrada en la Tabla 2.

ENERO	
PLAN	PORCENTAJE
Básico	50%
Intermedio	30%
Completo	20%

Tabla 1

FEBRERO	
PLAN	PORCENTAJE
Básico	51%
Intermedio	29%
Completo	20%

Tabla 2

¿Cuántos clientes se cambiaron del plan intermedio al completo?

A) 50 B) 60 C) 30 D) 100 E) 80

SOLUCION:

Sea "a" el número de personas que tienen un plan de servicio básico en el mes de enero.
Sea "b" el número de personas que tienen un plan de servicio intermedio en el mes de enero.
Sea "c" el número de personas que tienen un plan de servicio completo en el mes de enero.

Sea "y" el número de personas que tenían plan básico y se cambiaron al plan intermedio en el mes de febrero.
Sea "x" el número de personas que tenían plan intermedio y se cambiaron al plan completo en el mes de febrero.

Organizando la información en una tabla:

	ENERO		FEBRERO	
	Cantidad	Porcentaje	Cantidad	Porcentaje
Básico	a	50%	$a + 400 - y$	51%
Intermedio	b	30%	$b + y - x$	29%
Completo	c	20%	$c + x$	20%

Plantearemos nuestras ecuaciones en el plan de servicio completo en los meses de enero y febrero, porque tienen el mismo porcentaje.
Mes de enero:

$$\frac{c}{a+b+c} = 20\%$$

$$\frac{c}{a+b+c}=\frac{20}{100}$$
$$\frac{c}{a+b+c}=\frac{1}{5}$$

$$5c=a+b+c$$

Mes de febrero:

$$\frac{c+x}{a+b+c+400}=20\%$$

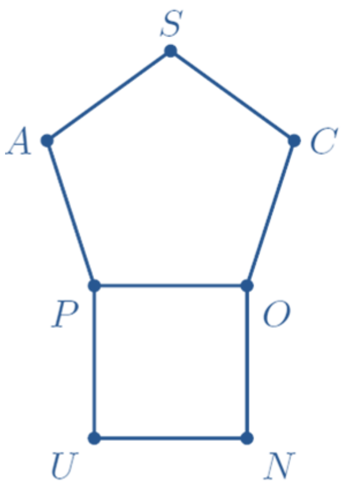
$$\frac{c+x}{a+b+c+400}=\frac{20}{100}$$

$$\frac{c+x}{a+b+c+400}=\frac{1}{5}$$

$$5c+5x=a+b+c+400$$
$$5c+5x=5c+400$$
$$5x=400$$
$$x=80$$

RESPUESTA: 80 clientes se cambiaron del plan intermedio al completo. **CLAVE E.**

14) En la siguiente figura se muestra un cuadrado PUNO y un pentágono regular PASCO. Determine el valor de n para el cual los puntos A, P, U (en ese orden) son vértices consecutivos de un polígono regular de n lados.



A) 15 B) 12 C) 20 D) 16 E) 10

SOLUCION:
La medida del ángulo interno de un polígono regular esta dado por:

$$m\sphericalangle i=\frac{180(n-2)}{n}$$

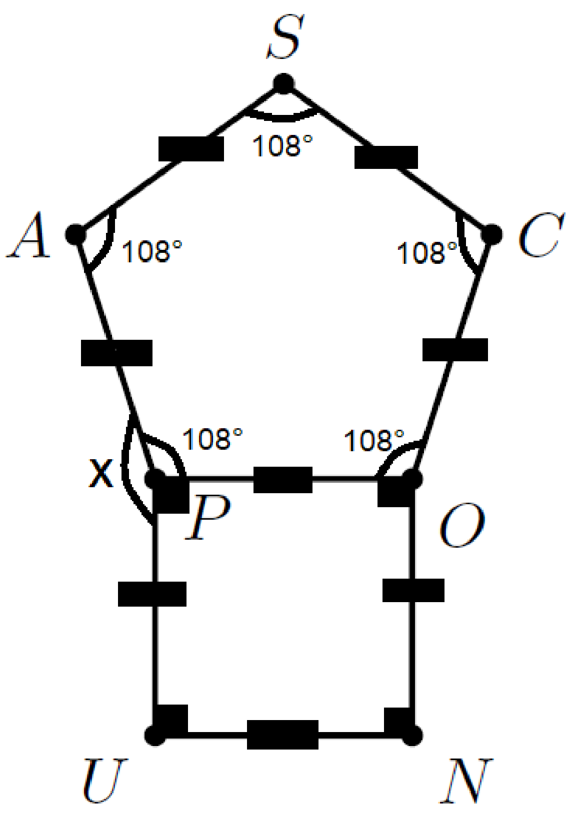
El ángulo interior del cuadrado PUNO es igual a 90°.
Hallando el ángulo interior del pentágono regular PASCO:

$$m\sphericalangle i=\frac{180(5-2)}{5}$$

$$m\measuredangle i = 36(3)$$

$$m\measuredangle i = 108°$$

Graficando se tiene:



Sea “x” la medida del ángulo interior del polígono regular de “n” lados:

$$108° + x + 90° = 360°$$
$$198° + x = 360°$$
$$x = 162°$$

Hallando “n”:

$$m\measuredangle i = \frac{180(n-2)}{n}$$

$$162° = \frac{180(n-2)}{n}$$

$$162n = 180n - 360$$
$$360 = 180n - 162n$$
$$360 = 18n$$
$$20 = n$$

Por tanto, el polígono regular de “n” lados es el icoságono.

RESPUESTA: El valor de “n” es 20. **CLAVE C**.

15) Araceli dibujó en el plano cartesiano la gráfica de una función cuadrática:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Donde a, b y c son constantes. Ella notó que los siguientes puntos del plano cartesiano pertenecen a su gráfica: (0;7), (2;5) y (3;10). ¿Cuál de los siguientes puntos también pertenece a la gráfica de Araceli?

A) (1;3) B) (4;18) C) (–1;0) D) (5;32) E) (–2;15)

SOLUCION:
Planteando las ecuaciones según los tres pares ordenados:

Par ordenado (0;7) $\rightarrow f(0) = a(0)^2 + b(0) + c$
$$7 = 0 + 0 + c$$
$$7 = c$$

Par ordenado (2;5) $\rightarrow f(2) = a(2)^2 + b(2) + c$
$$5 = 4a + 2b + 7$$
$$-2 = 4a + 2b \quad ...(\alpha)$$

Par ordenado (3;10) $\rightarrow f(3) = a(3)^2 + b(3) + c$
$$10 = 9a + 3b + 7$$
$$3 = 9a + 3b$$
$$1 = 3a + b \quad ...(\beta)$$

Juntando ambas ecuaciones:

$$(\alpha) + (\beta) \begin{cases} 4a + 2b = -2 \\ 3a + b = 1 \end{cases} \qquad \textit{Multiplicando por } (-2)$$

Tendríamos:

$$\begin{cases} 4a + 2b = -2 \\ -6a - 2b = -2 \end{cases}$$
$$-2a = -4 \qquad \text{Sumando ambas ecuaciones}$$
$$a = 2$$

Reemplazando "a" en la ecuación (β)
$$3a + b = 1$$
$$3(2) + b = 1$$
$$b = 1 - 6$$
$$b = -5$$

En consecuencia, la función cuadrática estaría definido: $f(x) = 2x^2 - 5x + 7$.

Vamos a probar con cada alternativa para saber si pertenecen a la parábola.

a) (1;3) $\rightarrow f(1) = 2(1)^2 - 5(1) + 7$
$3 = 2 - 5 + 7$
$3 \neq 4$. Por tanto, el punto (1;3) no pertenece a la parábola.

b) (4;18) $\rightarrow f(4) = 2(4)^2 - 5(4) + 7$
$18 = 2(16) - 20 + 7$
$18 \neq 19$. Por tanto, el punto (4;18) no pertenece a la parábola.

c) (–1;0) $\rightarrow f(-1) = 2(-1)^2 - 5(-1) + 7$
$0 = 2(1) + 5 + 7$
$0 \neq 14$. Por tanto, el punto (–1;0) no pertenece a la parábola.

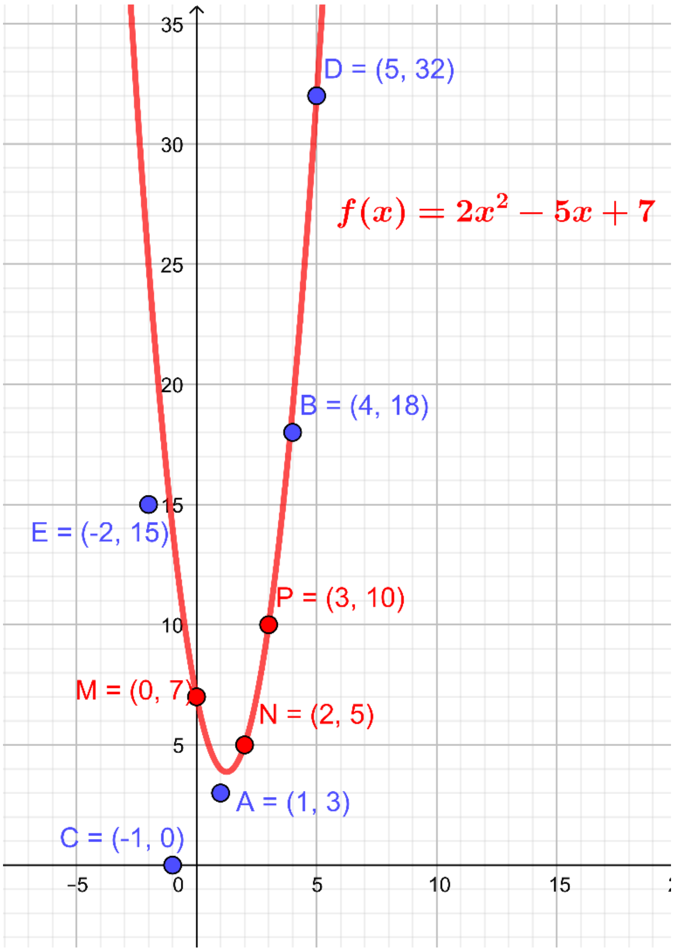
d) (5;32) $\rightarrow f(5) = 2(5)^2 - 5(5) + 7$
$32 = 2(25) - 25 + 7$
$32 = 32$. Por tanto, el punto (5;32) sí pertenece a la parábola.

e) (–2;15) $\rightarrow f(-2) = 2(-2)^2 - 5(-2) + 7$

$15 = 2(4) + 10 + 7$

$15 \neq 25$. Por tanto, el punto (–2;15) no pertenece a la parábola.

Comprobando lo realizado:



RESPUESTA: El punto de la alternativa D (5;32) también pertenece a la gráfica de Araceli.

CLAVE D.

16) Un número natural N es llamado cuasi-divisible si al sumar 1 a cualquiera de sus dígitos obtenemos un divisor de N. Por ejemplo, 102 es cuasi-divisible porque 1 + 1, 0 + 1 y 2 + 1 son divisores de 102. Determine el mayor número cuasi-divisible que consta de tres dígitos distintos y dé como respuesta la suma de los cuadrados de sus dígitos.

A) 145 B) 162 C) 82 D) 97 E) 130

SOLUCION:

Sea el número natural de tres dígitos: $N = \overline{abc}$

Para que N sea el mayor posible, entonces: $a = 9$. Como son dígitos distintos $b = 4$ (No cumple cuando b = 8; 7; 6; 5)

Tanteando se obtiene: $c = 0$.

Por tanto, el número es: 940.

Hallando la suma de los cuadrados de sus dígitos: $9^2 + 4^2 + 0^2 = 81 + 16 + 0 = 97$.

Comprobación:

$$Dígito\ 9. \rightarrow 940 = \dot{\overline{10}}$$
$$Dígito\ 4. \rightarrow 940 = \dot{5}$$
$$Dígito\ 0. \rightarrow 940 = \dot{1}$$

RESPUESTA: La suma de los cuadrados de sus dígitos del número N es 97. **CLAVE D.**

17) ¿Cuántos enteros positivos de 11 dígitos son múltiplos de 162 y cumplen que cada uno de sus dígitos es 0 o 9?
Aclaración: Tenga en cuenta que un entero positivo no empieza con el dígito 0.

A) 11 B) 15 C) 36 D) 10 E) 9

SOLUCION:

Un número será divisible por 162, cuando sea divisible por 81 y 2, porque 162 = 81×2.
Un número es divisible por 2, cuando la última cifra es par.
Como se tienen sólo cifras de 9 ó 0, entonces el número formado de once dígitos será divisible por 81 cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 81. En consecuencia, las cifras deben tener 9 nueves (9×9 = 81) y debe empezar del 9.
Representando gráficamente:

9	9	9	9	9	9	9	9	9	0	0

Casillero fijo Casillero fijo

Se tienen 9 casilleros en la se pueden formar varios números con 8 nueves y 1 cero. Ya que importa el orden, entran todos los elementos y algunos se repiten, entonces tenemos una permutación con repetición:

$$P^{n}_{\alpha;\beta,\ldots} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots}$$

$$P^{9}_{8;1} = \frac{9!}{8!\,1!} = \frac{9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1} = 9$$

RESPUESTA: La longitud del lado del cuadrado es 10 cm. **CLAVE E.**

18) En la pizarra están escritos 8 números naturales que forman una progresión aritmética. Se sabe que exactamente M de esos números son múltiplos de 3. ¿Cuál de los siguientes números no es un posible valor de M?

A) 0 B) 2 C) 3 D) 4 E) 8

SOLUCION:

M es la cantidad de números múltiplos de 3. r = Razón aritmética.
Planteando la progresión aritmética:

$$t_1 \xrightarrow{+r} t_2 \xrightarrow{+r} t_3 \xrightarrow{+r} t_4 \xrightarrow{+r} t_5 \xrightarrow{+r} t_6 \xrightarrow{+r} t_7 \xrightarrow{+r} t_8$$

Propiedad: La suma de dos números que son múltiplos de "n" se obtiene otro múltiplo de "n".

$$\overset{o}{n} + \overset{o}{n} = \overset{o}{n}$$

PRIMER CASO: Cuando: $t_1 = \dot{3}$; $r = \dot{3}$

$$\dot{3};\ \xrightarrow{+\dot{3}}\ \dot{3};\ \xrightarrow{+\dot{3}}\ \dot{3};\ \xrightarrow{+\dot{3}}\ \dot{3};\ \xrightarrow{+\dot{3}}\ \dot{3};\ \xrightarrow{+\dot{3}}\ \dot{3};\ \xrightarrow{+\dot{3}}\ \dot{3};\ \xrightarrow{+\dot{3}}\ \dot{3}$$

Por tanto, M = 8 (Todos los números de la progresión aritmética son múltiplos de 3).
Ejemplo:

3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24

+3 +3 +3 +3 +3 +3 +3

SEGUNDO CASO: Cuando: $t_1 = \dot{3} + 1$ ó $t_1 = \dot{3} + 2$; $r = \dot{3}$

$\dot{3}+1$; $\dot{3}+1$; $\dot{3}+1$; $\dot{3}+1$; $\dot{3}+1$; $\dot{3}+1$; $\dot{3}+1$; $\dot{3}+1$

$+\dot{3}$ $+\dot{3}$ $+\dot{3}$ $+\dot{3}$ $+\dot{3}$ $+\dot{3}$ $+\dot{3}$

Por tanto, M = 0 (Ninguno de los números de la progresión aritmética son múltiplos de 3).
Ejemplo:

1; 4; 7; 10; 13; 16; 19; 22

+3 +3 +3 +3 +3 +3 +3

TERCER CASO: Cuando: $t_1 = \dot{3} + 1$, $r = \dot{3} + 1$ ó $t_1 = \dot{3} + 2$, $r = \dot{3} + 2$

$\dot{3}+1$; $\dot{3}+2$; $\dot{3}$; $\dot{3}+1$; $\dot{3}+2$; $\dot{3}$; $\dot{3}+1$; $\dot{3}+2$

$+\dot{3}+1$ $+\dot{3}+1$ $+\dot{3}+1$ $+\dot{3}+1$ $+\dot{3}+1$ $+\dot{3}+1$ $+\dot{3}+1$

Por tanto, M = 2 (Sólo 2 números de la progresión aritmética son múltiplos de 3).
Ejemplo:

1; 5; 9; 13; 17; 21; 25; 29

+4 +4 +4 +4 +4 +4 +4

CUARTO CASO: Cuando: $t_1 = \dot{3} + 1$, $r = \dot{3} + 2$ ó $t_1 = \dot{3} + 2$, $r = \dot{3} + 1$

$\dot{3}+1$; $\dot{3}$; $\dot{3}+2$; $\dot{3}+1$; $\dot{3}$; $\dot{3}+2$; $\dot{3}+1$; $\dot{3}$

$+\dot{3}+2$ $+\dot{3}+2$ $+\dot{3}+2$ $+\dot{3}+2$ $+\dot{3}+2$ $+\dot{3}+2$ $+\dot{3}+2$

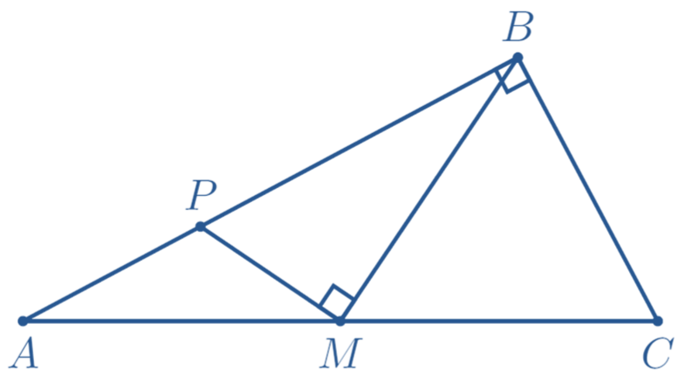
Por tanto, M = 3 (Sólo 3 números de la progresión aritmética son múltiplos de 3).
Ejemplo:

1; 6; 11; 16; 21; 26; 31; 36

+5 +5 +5 +5 +5 +5 +5

RESPUESTA: M no puede tomar el valor de 4. **CLAVE D**.

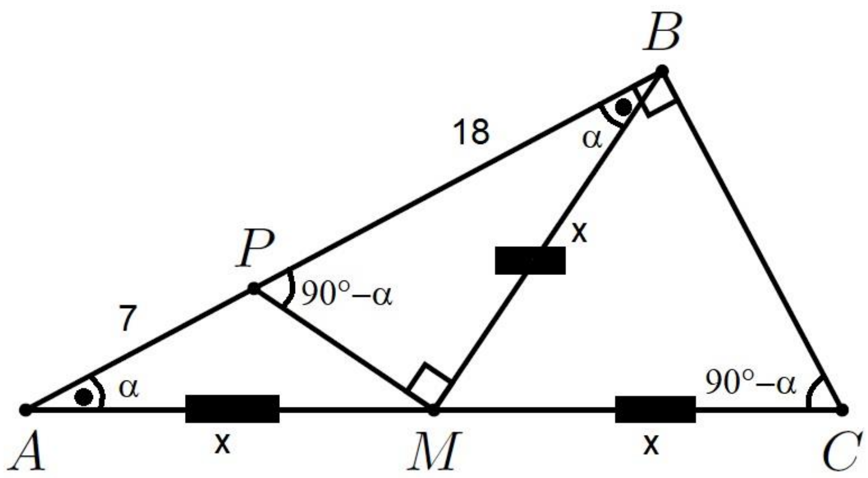
19) Sea ABC un triángulo rectángulo, recto en B, donde M es el punto medio de su hipotenusa. En el segmento AB se ubica un punto P tal que ∠BMP = 90°. Si AP = 7 y PB = 18, determine la medida de AC.



A) 30 B) 32 C) 35 D) $14\sqrt{5}$ E) $\sqrt{706}$

SOLUCION:

Sea "x" la medida del segmento AM.
Utilizando la propiedad de la mediana relativa a la hipotenusa de un triángulo rectángulo ABC (En todo triángulo rectángulo se cumple que el valor de la mediana trazada del ángulo recto al punto medio de la hipotenusa, es igual a la mitad del valor de dicha hipotenusa), si: MB es mediana del triángulo ABC, entonces: AM = MC = BM = x.
.
Si: m∠BAC = α, entonces m∠BCA =90°–α, porque dichos ángulos son complementarios.
El triángulo AMB es isósceles (BM = AM) de manera que: m∠PBM = α, y en consecuencia m∠BPM = 90°–α, porque dichos ángulos son complementarios.



El ΔABC ~ ΔPBM (Ángulo – Ángulo)
90° ~ (90°–α)

$$\frac{2x}{18} = \frac{25}{x}$$

$$2x^2 = 18 \times 25$$

$$x^2 = 9 \times 25$$

$$x = \sqrt{225}$$

$$x = 15$$

AC = 2x = 2(15) = 30.

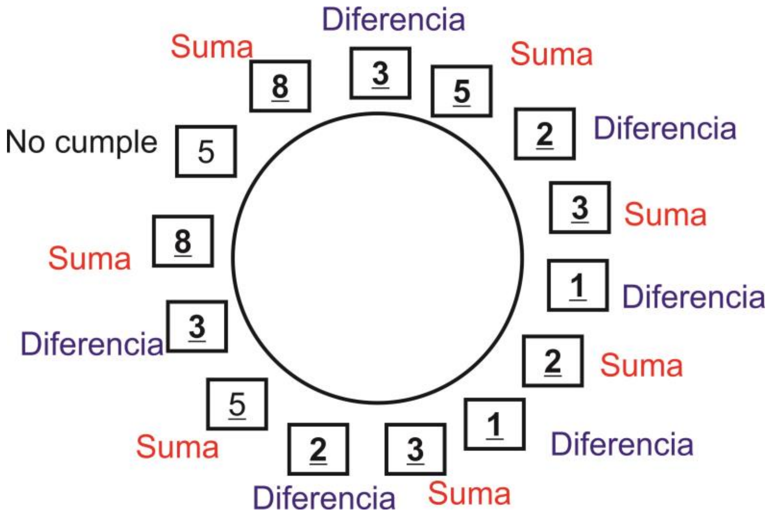
RESPUESTA: La longitud AC mide 30 unidades lineales. **CLAVE A.**

20) Alrededor de una circunferencia están escritos 14 enteros positivos, no necesariamente distintos. Antonio subrayó cada número que es igual a la suma de sus dos vecinos. Luego, Blanca subrayó cada número que es igual al valor absoluto de la diferencia de sus dos vecinos. ¿Como máximo cuántos números subrayados puede haber después de hacer esto?

A) 14 B) 13 C) 12 D) 10 E) 7

SOLUCION:

Para que el número sea subrayado los números vecinos deben sumarse o restarse. Por lo que debe alternarse entre la suma y diferencia en forma consecutiva, pero al completar la circunferencia completa con los catorce números habrá un número que no cumple con la suma o diferencia, por lo que se subrayarán 13 números. Para ello vamos a mostrar un ejemplo:



RESPUESTA: Se subrayaron 13 números como máximo. **CLAVE B**.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN