XIII Olimpiada Nacional Escolar de Matemática (ONEM 2016)
Tercera Fase - Nivel 2 – Solucionario.

1) Alex tiene en su jardín un árbol que crece exactamente medio metro al año. La altura del árbol es igual a cinco veces la altura de Alex. Hace 12 años Alex medía 21 centímetros menos y su árbol medía la mitad de lo que él medía en ese momento. ¿Cuántos centímetros mide actualmente el árbol de Alex?

SOLUCION:
Planteando:

	Hace 12 años	Presente
Alex	x – 21 cm	x
Su árbol	5x – 12/2 m = 5x – 6 m	5x

El árbol medía la mitad de lo que él medía en ese momento:

$$5x - 6m = \frac{x - 21\,cm}{2}$$

$$2(5x - 600) = x - 21$$

1 m = 100 cm

$$10x - 1200 = x - 21$$
$$9x = 1200 - 21$$
$$x = \frac{1179}{9} = 131$$

El árbol de Alex mide actualmente: 5x = 5(131) = 655 cm

RESPUESTA: Actualmente el árbol de Alex mide 655 cm.

2) Héctor trabaja entregando botellas de gaseosa. En su camión todas las cajas están llenas de botellas (12 en cada caja) y aparte hay menos de 12 botellas sueltas. Si la cantidad de botellas más la cantidad de cajas es 216. ¿Cuántas cajas hay en el camión de Héctor?

SOLUCION:
Planteando:
Cantidad de cajas: x
Hay menos de 12 botellas sueltas: y ≤ 12
Cantidad de botellas: 12x + y
La cantidad de botellas más la cantidad de cajas es 216:

$$12x + y + x = 216$$
$$13x + y = 216$$
$$x = \frac{216 - y}{13}$$

El único valor entero que puede tomar “y” es 8, para que “x” también sea otro número entero. (y = 8)

Reemplazando se tiene:

$$x = \frac{216 - 8}{13} = \frac{208}{13} = 16$$

RESPUESTA: En el camión de Héctor hay 16 cajas.

3) Definimos los números: $a = \left(1 + \frac{1}{2015}\right)^{2015}$ y $b = \left(1 + \frac{1}{2015}\right)^{2016}$. Calcule el valor de: $\frac{a^b}{b^a}$

SOLUCION:
Asignando la siguiente variable:

$$x = 1 + \frac{1}{2015} = \frac{2016}{2015}$$

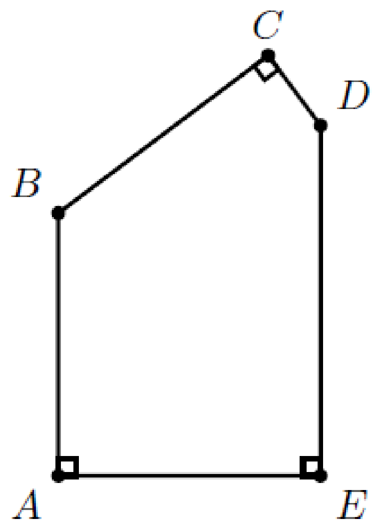
Reemplazando se tiene:
$a = x^{2015}$ y $b = x^{2016}$
Hallando lo que nos piden:

$$\frac{a^b}{b^a} = \frac{(x^{2015})^{(x^{2016})}}{(x^{2016})^{(x^{2015})}} = \frac{x^{2015.x^{2016}}}{x^{2016.x^{2015}}} = x^{2015.x^{2016}-2016.x^{2015}} = x^{x^{2016}(2015x-2016)}$$

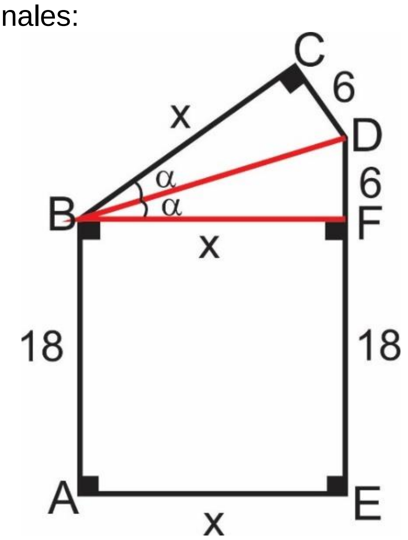
$$= x^{x^{2016}(2015.\frac{2016}{2015}-2016)} = x^{x^{2016}(2016-2016)} = x^{x^{2016}(0)} = x^0 = 1$$

RESPUESTA: El valor de: $\frac{a^b}{b^a}$ es 1.

4) Sea ABCDE un pentágono que tiene ángulos rectos en los vértices A, C y E, tal que AB = 18 cm, CD = 6 cm y DE = 24 cm. Calcule el perímetro del pentágono ABCDE (en cm) si su área es 480 cm^2.



SOLUCION:
Haciendo algunos trazos adicionales:



Trazamos el segmento BF, perpendicular a DE. Si: BF = x, entonces AE = x.

Si: BA = 18, entonces: FE = 18, DF = 6. Se traza el segmento BD.
Por el teorema de la bisectriz (Todo punto que pertenece a la bisectriz de un ángulo equidista a los lados del ángulo) se cumple: m∠DBF = α y m∠DBC = α. Además: BC = x.
El área del pentágono ABCDE es 480 cm^2. Es decir:

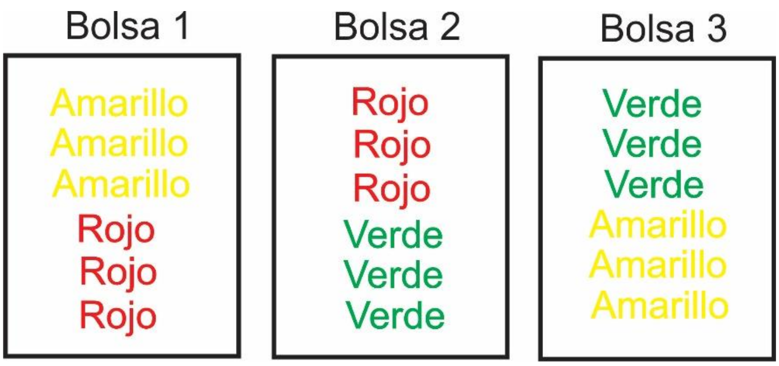
$$Area(ABCDE) = 480$$
$$Area(BCD) + Area(DBF) + Area(ABFE) = 480$$
$$\frac{6x}{2} + \frac{6x}{2} + 18x = 480$$
$$3x + 3x + 18x = 480$$
$$24x = 480$$
$$x = 20$$

Hallando el perímetro del pentágono ABCDE:
Perímetro ABCDE: 18 + x + x + 24 + 6
Perímetro ABCDE: 48 + 2x
Perímetro ABCDE: 48 + 2(20)
Perímetro ABCDE: 48 + 40 = 88

RESPUESTA: El perímetro del pentágono ABCDE es 88 cm.

5) Favio tiene tres bolsas de caramelos. Una bolsa tiene tres caramelos amarillos y tres caramelos rojos, otra bolsa tiene 3 caramelos rojos y 3 caramelos verdes y la última bolsa tiene 3 caramelos verdes y 3 caramelos amarillos. Favio va a sacar, al azar, un caramelo de cada bolsa. La probabilidad de que Favio saque tres caramelos de colores distintos es del n%. Determine el valor de n.

SOLUCION:
Graficando:



Definiendo cada evento:
Probabilidad de extraer un caramelo de color amarillo: P(Amarillo)
Probabilidad de extraer un caramelo de color rojo: P(Rojo)
Probabilidad de extraer un caramelo de color verde: P(Verde)
Probabilidad de extraer tres caramelos de colores distintos: P(x)
Los eventos son independientes por lo que hay que multiplicar las probabilidades y tendremos dos casos:

$$P(x) = P(Amarillo) \times P(Rojo) \times P(Verde) + P(Rojo) \times P(Verde) \times P(Amarillo)$$
$$P(x) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{6}$$
$$P(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$
$$P(x) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$
$$P(x) = \frac{1}{4} = 25\%$$

Igualando: 25% = n%. Por tanto n = 25.

RESPUESTA: El valor de "n" es 25.

6) Un número entero positivo de cuatro dígitos puede expresarse como el producto $\overline{ab} \times \overline{da}$, donde a; b; d son dígitos no nulos, distintos entre sí, tales que $\overline{da} > \overline{ab}$. Halle el menor valor posible de $\overline{da} - \overline{ab}$.

SOLUCION:

Un número entero positivo de cuatro dígitos puede expresarse como:

$$\overline{mnpq} = \overline{ab} \times \overline{da}$$

También debe cumplirse:

$$\overline{da} > \overline{ab}$$

Probando con los menores valores posibles:

- 19x21 entonces 21 – 19 = 2. Pero 19x21 = 399 ¡Tiene 3 cifras! Por lo que no cumple.
- 39x43 entonces 43 – 39 = 4. Pero 39x43 = 1677 ¡Tiene 4 cifras! Por lo que sí cumple.

Por tanto: a = 3, b = 9, d = 4. Además: $\overline{da} - \overline{ab}$ = 43 – 39 = 4.

RESPUESTA: El menor valor posible de $\overline{da} - \overline{ab}$ es 4.

7) Roberto tiene 101 monedas, ubicadas en una fila. Cada moneda es de 10, 20 ó 50 céntimos. Se sabe que no hay un grupo de monedas consecutivas cuya suma sea 60 céntimos. ¿Cuál es la menor cantidad de monedas de 50 céntimos que puede tener Roberto?

SOLUCION:

Cada moneda es de 10, 20 ó 50 céntimos.

Ordenando de manera que se utilice menor cantidad de monedas de 50 céntimos además no hay un grupo de monedas consecutivas cuya suma sea 60 céntimos:

6 monedas

Se va poniendo monedas en grupos de seis que cumple la condición dada, es decir en el siguiente orden: 20; 20; 10; 20; 20 y 50. En 16 grupos se tendría: 6(16) = 96 monedas, para las 101 monedas nos faltaría 5 monedas nada más sin considerar la moneda de 50 céntimos. Por tanto sólo se utilizarían 16 monedas de 50 céntimos.

RESPUESTA: La menor cantidad de monedas de 50 céntimos que puede tener Roberto es 16.

8) Sean a y b enteros positivos tales que $a^2 + b^2 = 300a$. Determine la suma de todos los valores distintos que puede tomar a.

SOLUCION:

Despejando "b"

$$b = \sqrt{300a - a^2}$$

Para que "b" sea entero positivo debe cumplirse que la discriminante sea mayor que cero, es decir:

$$300a - a^2 > 0$$
$$-300a + a^2 < 0$$
$$a^2 - 300a < 0$$
$$a(a - 300) < 0$$
$$a = 0, \qquad a - 300 = 0$$
$$a = 0, \qquad a = 300$$

a∈⟨0;300⟩

Despejando "a"

$$a^2 - 300a + b^2 = 0$$

Suma de raíces de "a", está dado por: S

$$S = \frac{-(-300)}{1} = 300$$

Utilizando la fórmula general de una ecuación cuadrática:

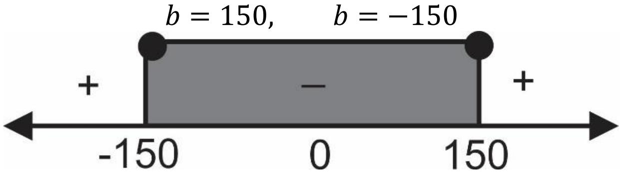
$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$x = \frac{-(-300) \pm \sqrt{(-300)^2 - 4(1)(b^2)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{300 \pm \sqrt{300^2 - 4b^2}}{2}$$

La discriminante debe ser mayor o igual que cero, por tanto se tiene:

$$300^2 - 4b^2 \geq 0$$
$$-300^2 + 4b^2 \leq 0$$
$$4b^2 - 300^2 \leq 0$$
$$(2b - 300)(2b + 300) \leq 0$$
$$2b - 300 = 0, \qquad 2b + 300 = 0$$
$$b = 150, \qquad b = -150$$



b∈⟨0;150] porque "b" no puede tomar valores negativos.

También si cumple: $a^2 + b^2 = 300a$. Podría expresarse de la siguiente manera:

$a^2 + b^2 = (3)(2^2)(5^2)a$
$a^2 + b^2 = (3)(2)(5^2)(2)a$
$a^2 + b^2 = (6)(5^2)(2)a$

Ello implica que a y b tienen que ser múltiplos de 6 y/o 5, porque al reemplazar en la expresión dichos múltiplos cumplirán con la igualdad.

Con toda esta información ahora sí podemos tabular:

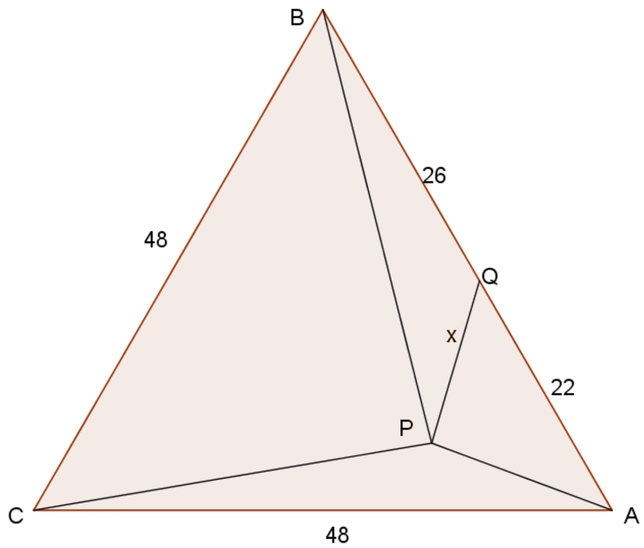
Si: a = 6 ⇒ b = 42
Si: a = 30 ⇒ b = 90
Si: a = 60 ⇒ b = 120

Si: a = 108 $\Rightarrow$ b = 144
Si: a = 150 $\Rightarrow$ b = 150
Si: a = 192 $\Rightarrow$ b = 144
Si: a = 240 $\Rightarrow$ b = 120
Si: a = 270 $\Rightarrow$ b = 90
Si: a = 294 $\Rightarrow$ b = 42
Sumando los valores de "a": 6 + 30 + 60 + 108 + 150 + 192 + 240 + 270 + 294 = 1350

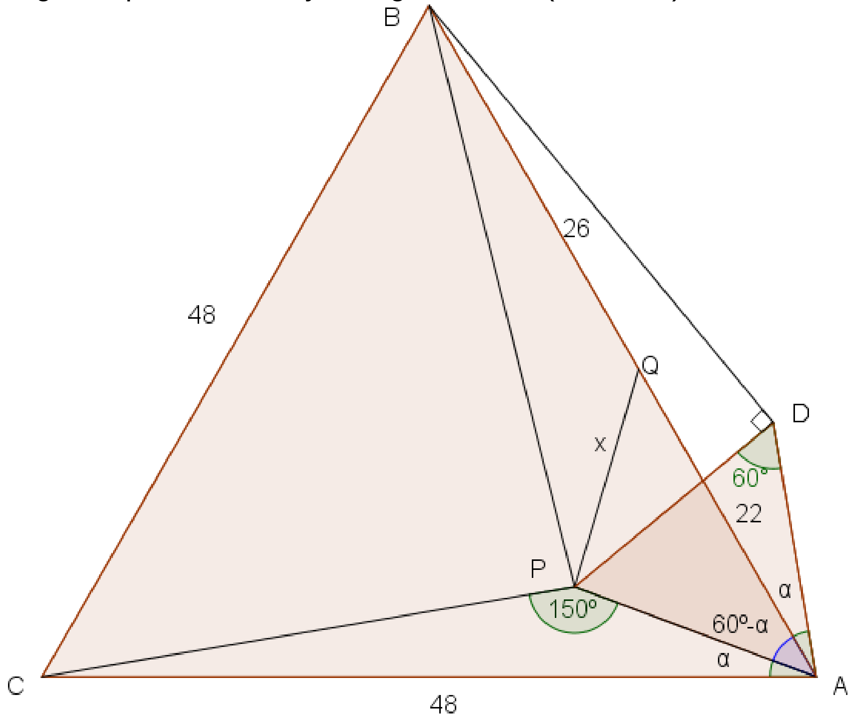
RESPUESTA: La suma de todos los valores distintos que puede tomar a es 1350.

9) Sea ABC un triángulo equilátero de lado 48 y Q un punto del lado AB tal que BQ = 26. Si P es un punto en el interior del triángulo ABC tal que $PA^2 + PC^2 = PB^2$, determine el menor valor entero que puede tomar la longitud del segmento PQ.

SOLUCION:
Graficando se tiene:



Trazamos el triángulo equilátero PAD y el segmento BD (BD $\perp$ PD)

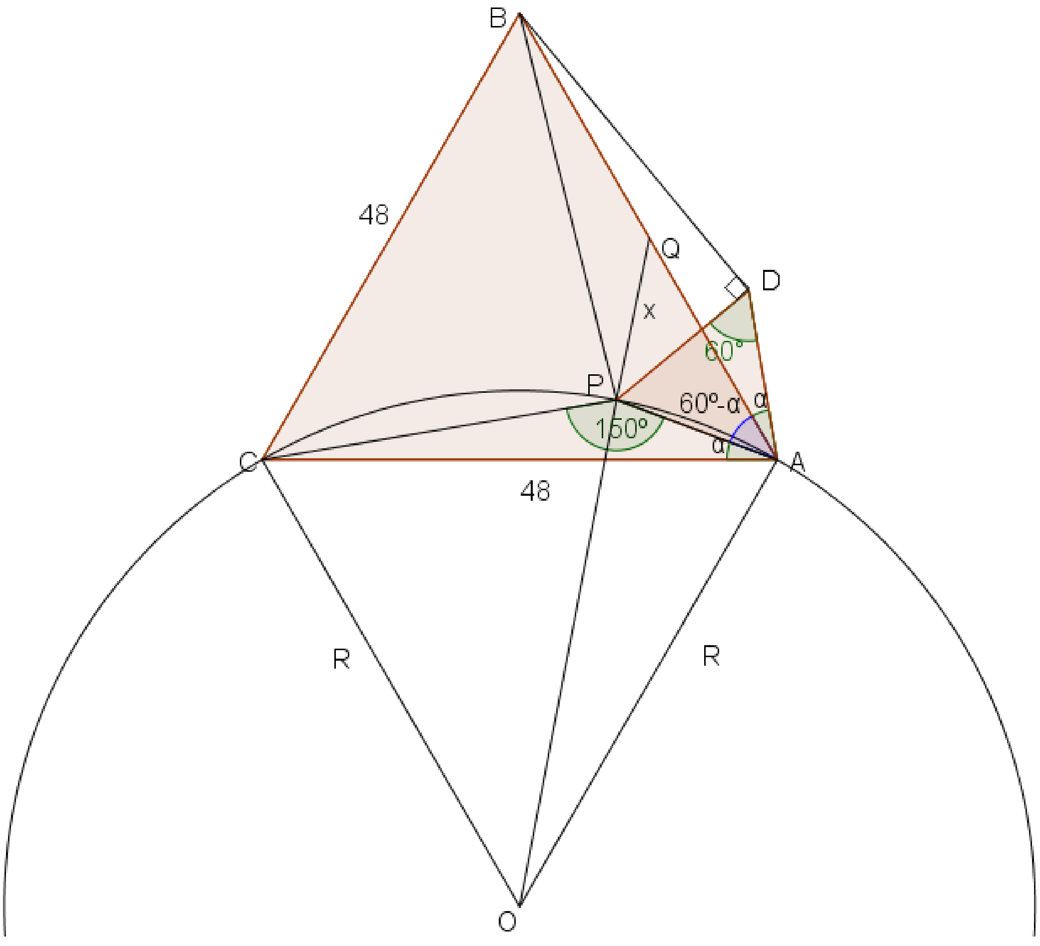


Como el ΔPAD es equilátero m∠PAD = 60º, m∠DAP = 60º, PA = DA = PD
Si: m∠PAC = α, entonces m∠PAQ = 60º – α, porque el ΔABC es equilátero.
También se cumple: m∠DAQ = α.
El ΔPAC ≅ DAB (por LAL)

- Lado: PA = DA
- Angulo: m∠PAC = m∠DAQ = α
- Lado: CA = AB = 48

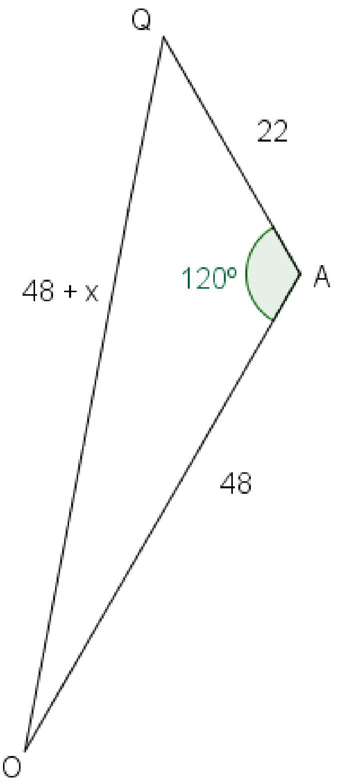
Se cumple entonces: m∠ADB = 90º + 60º = 150º, m∠APC = 150º. Además: PC = DB
Tenemos el triángulo rectángulo: ΔPDB y por el teorema de Pitágoras se cumple:
$PD^2 + DB^2 = BP^2$
$PA^2 + PC^2 = BP^2$ (Reemplazando: DB = PC, PD = PA)

Ahora trazamos la circunferencia de centro O y de radio R (Circunscribimos la circunferencia al ΔPAC)



El ángulo inscrito a la circunferencia: m∠APC = 150º, es especial porque el arco mayor AC = 2(150º) = 300º y por tanto el arco APC = 60º (Porque la suma es igual a 360º) y el ángulo central COA = 60º. En consecuencia el Δ COA es equilátero, R = 48, OP = R = 48. También se cumple: m∠OAQ = 60º + 60º = 120º.

“x” es la mínima distancia porque pasa por el centro de la circunferencia.
Finalmente se tiene el siguiente triángulo: ΔOAQ



Hallando "x" utilizando la ley de cosenos:

$$(48+x)^2 = 22^2 + 48^2 - 2(22)(48)Cos120°$$
$$(48+x)^2 = 484 + 2304 - 2(22)(48)\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$(48+x)^2 = 484 + 2304 + 1056$$
$$(48+x)^2 = 3844$$
$$48 + x = 62$$
$$x = 14$$

RESPUESTA: El menor valor entero que puede tomar la longitud del segmento PQ es 14.

10) Joaquín está de viaje en un país extraño donde hay billetes de valor n para cada entero positivo n menor o igual que 50, es decir, hay billetes de valor 1, de valor 2,..., de valor 50. Joaquín tiene exactamente 7 billetes de valores $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < n_5 < n_6 < n_7$, y con ellos puede pagar cualquier objeto cuyo valor sea un número entre 1 y 60, inclusive, sin recibir vuelto. Determine el menor valor posible de n_7.

SOLUCION:

Tabulando se tiene los siguientes billetes:

1	2	4	8	14	15	16

Vamos a comprobar que con estos billetes podemos obtener desde el valor de 1 hasta 60.

1
2
1 + 2 = 3
4
4 + 1 = 5
4 + 2 = 6
4 + 2 + 1 = 7
8

15 + 14 + 2 = 31
15 + 14 + 2 + 1 = 32
15 + 14 + 4 = 33
15 + 14 + 4 + 1 = 34
15 + 14 + 4 + 2 = 35
15 + 14 + 4 + 2 + 1 = 36
15 + 14 + 8 = 37
15 + 14 + 8 + 1 = 38

$8 + 1 = 9$
$8 + 2 = 10$
$8 + 2 + 1 = 11$
$8 + 4 = 12$
$8 + 4 + 1 = 13$
$8 + 4 + 2 = 14$
$8 + 4 + 2 + 1 = 15$
$14 + 2 = 16$
$14 + 2 + 1 = 17$
$14 + 4 = 18$
$14 + 4 + 1 = 19$
$14 + 4 + 2 = 20$
$14 + 4 + 2 + 1 = 21$
$14 + 8 = 22$
$14 + 8 + 1 = 23$
$14 + 8 + 2 = 24$
$14 + 8 + 2 + 1 = 25$
$14 + 8 + 4 = 26$
$14 + 8 + 4 + 1 = 27$
$14 + 8 + 4 + 2 = 28$
$14 + 8 + 4 + 2 + 1 = 29$
$15 + 14 + 1 = 30$
$15 + 14 + 8 + 2 = 39$
$15 + 14 + 8 + 2 + 1 = 40$
$15 + 14 + 8 + 4 = 41$
$15 + 14 + 8 + 4 + 1 = 42$
$15 + 14 + 8 + 4 + 2 = 43$
$15 + 14 + 8 + 4 + 2 + 1 = 44$
$16 + 15 + 14 = 45$
$16 + 15 + 14 + 1 = 46$
$16 + 15 + 14 + 2 = 47$
$16 + 15 + 14 + 2 + 1 = 48$
$16 + 15 + 14 + 4 = 49$
$16 + 15 + 14 + 4 + 1 = 50$
$16 + 15 + 14 + 4 + 2 = 51$
$16 + 15 + 14 + 4 + 2 + 1 = 52$
$16 + 15 + 14 + 8 = 53$
$16 + 15 + 14 + 8 + 1 = 54$
$16 + 15 + 14 + 8 + 2 = 55$
$16 + 15 + 14 + 8 + 2 + 1 = 56$
$16 + 15 + 14 + 8 + 4 = 57$
$16 + 15 + 14 + 8 + 4 + 1 = 58$
$16 + 15 + 14 + 8 + 4 + 2 = 59$
$16 + 15 + 14 + 8 + 4 + 2 + 1 = 60$

RESPUESTA: El menor valor posible de n_7 es 16.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN