XIII Olimpiada Nacional Escolar de Matemática (ONEM 2016)
Tercera Fase - Nivel 1 – Solucionario.

1) Roysi lanzó 5 dados sobre la mesa y observó que los números que mostraron los dados eran distintos. Determina la suma de los cinco números mostrados si su producto no es múltiplo de 8.
Aclaración: Un dado tiene los números del 1 al 6 en sus caras.

SOLUCION:
Sean los números que se obtuvo al lanzar los cinco dados: n1, n2, n3, n4, n5.
Además: n1 ≠ n2 ≠ n3 ≠ n4 ≠ n5.
Por dato del problema se tiene:

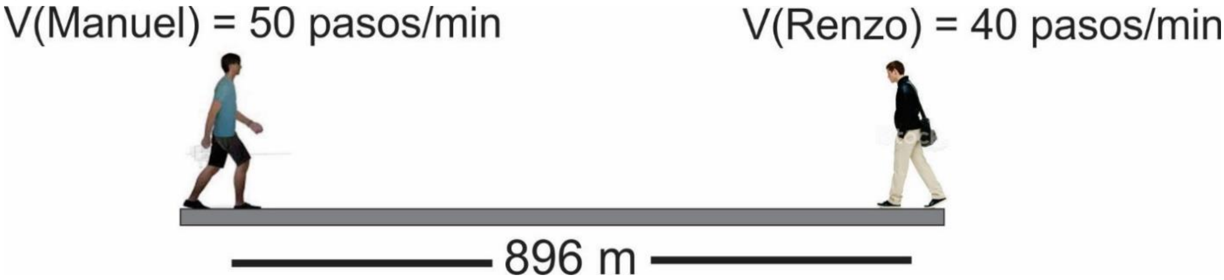
$$n1 \times n2 \times n3 \times n4 \times n5 \neq \overset{o}{8}$$

8 = 4×2
Se deduce que de los cinco números ninguno es 4.
Por tanto los números son: 1x2x3x5x6 = 180.
La suma de dicho números es: 1 + 2 + 3 + 5 + 6 = 17

RESPUESTA: La suma de los cinco números mostrados es 17.

2) Manuel y Renzo están separados una distancia de 896 metros y cada uno avanza en la dirección del otro para encontrarse. Manuel camina a 50 pasos por minuto y en cada paso recorre 0.8 metros. Renzo camina a 40 pasos por minuto y en cada paso recorre 0.6 metros. ¿Después de cuántos minutos se encontrarán?

SOLUCION:
Graficando:



Convirtiendo las velocidades a m/min:

$$V(Manuel) = \frac{50\ pasos}{1\ minuto} = \frac{50\ (0{,}8\ m)}{1\ minuto} = 40\ m/min$$

$$V(Renzo) = \frac{40\ pasos}{1\ minuto} = \frac{40\ (0{,}6\ m)}{1\ minuto} = 24\ m/min$$

Ambas personas van al encuentro, por ello utilizaremos la fórmula del tiempo de encuentro (te):

$$t_e = \frac{Distancia}{Velocidad\ 1 + Velocidad\ 2}$$

$$t_e = \frac{896}{40 + 24} = \frac{896}{64} = 14\ min$$

RESPUESTA: Se encontrarán después de 14 minutos.

3) María y Jossy rindieron dos pruebas de matemática. El puntaje de cada prueba es un número entero entre 1 y 20, inclusive. En la primera prueba María obtuvo 20% más que Jossy; y en la segunda prueba Jossy obtuvo 25% más que María. El puntaje final es la suma de los puntajes de ambas pruebas. Si el puntaje final de María fue de 34, ¿Cuál fue el puntaje final de Jossy?

SOLUCION:
Planteando:

	Prueba 1	Prueba 2	Total
María	J + 20%J	m	34
Jossy	J	m + 25%m	?

Los puntajes de las notas están en escala vigesimal:

$$J + 20\%J \leq 20$$
$$120\%J \leq 20$$
$$\frac{120J}{100} \leq 20$$
$$J \leq \frac{200}{12}$$
$$J \leq 16{,}6..$$

J puede tomar los valores de: J = 16; 15; 14; …

$$m + 25\%m \leq 20$$
$$125\%m \leq 20$$
$$\frac{125m}{100} \leq 20$$
$$m \leq \frac{80}{5}$$
$$m \leq 16$$

m puede tomar los valores de: m = 16; 15; 14; …

Si: m = 16

$$J + 20\%J + m = 34$$
$$120\%J + 16 = 34$$
$$120\%J = 18$$
$$J = \frac{180}{12}$$

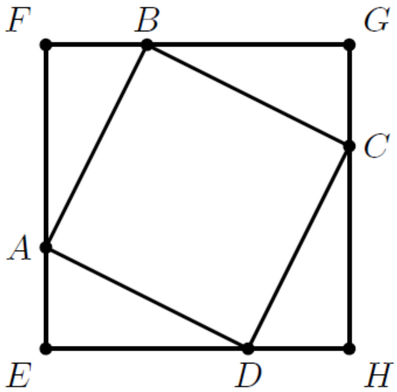
$$J = 15$$

Hallando el puntaje final de Jossy:

$$Puntaje\ Final = J + m + 25\%m$$
$$Puntaje\ Final = 15 + 125\%(16)$$
$$Puntaje\ Final = 15 + \frac{5}{4}(16)$$
$$Puntaje\ Final = 15 + 20 = 35$$
$$Puntaje\ Final = 35$$

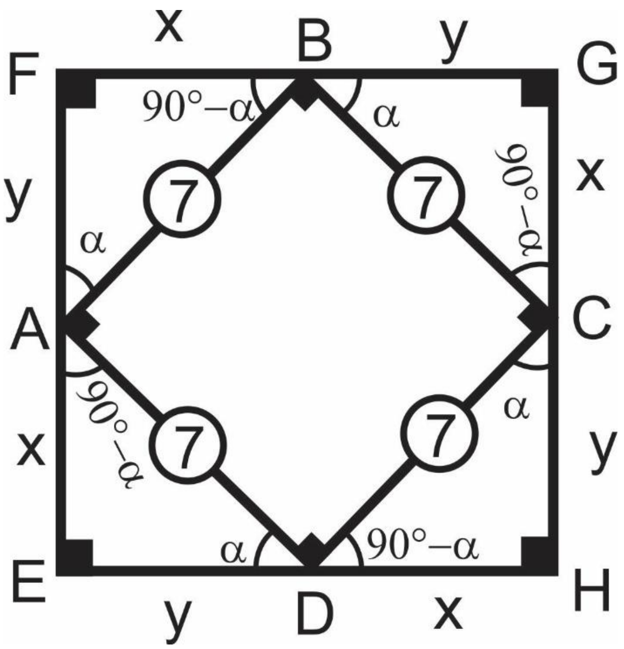
RESPUESTA: El puntaje final de Jossy fue 35.

4) El cuadrado ABCD tiene área 49 cm^2 y el triángulo AED tiene perímetro 15 cm. Calcule el área del cuadrado EFGH, en cm^2.



SOLUCION:

Graficando:



Si el cuadrado ABCD tiene como área 49 cm^2, por tanto la medida de cada lado mide 7 cm.
Por lo que AB = BC = CD = DA = 7 cm.
Asignando variables: AE = x, ED = y, m∠ADE = α y en consecuencia m∠DAE= 90º–α.
Si: m∠ADE = α ⇒ m∠CDH= 90º–α ⇒ m∠DCH = α ⇒ m∠GCB= 90º–α
Si: m∠DAE= 90º–α ⇒ m∠FAB = α ⇒ m∠FBA= 90º–α ⇒ m∠GBC = α
Por datos del problema se tiene:
x + y + 7 = 15 (El triángulo AED tiene de perímetro 15 cm)
x + y = 8
Por ALA (Ángulo – Lado – Ángulo) se cumple:
ΔAED ≅ ΔFAB, por tanto: ED = FA = y, EA = FB = x.
ΔAED ≅ ΔCHD, por tanto: ED = CH = y, EA = DH = x.
ΔAED ≅ ΔBGC, por tanto: ED = BG = y, EA = GC = x.
Por tanto: FE = x + y = 8
Área del cuadrado EFGH = FE^2 = 8^2 = 64

RESPUESTA: El área del cuadrado EFGH es 64 cm^2.

5) Kenny dijo un entero positivo. Luis lo multiplicó por 4 ó por 8. Freddy multiplicó el resultado de Luis por 3 ó por 6. André multiplicó el resultado de Freddy por 7 ó por 9. Raúl multiplicó el resultado de André por 7 ó por 8. El resultado final fue 2016. ¿Cuál fue el número que dijo Kenny?

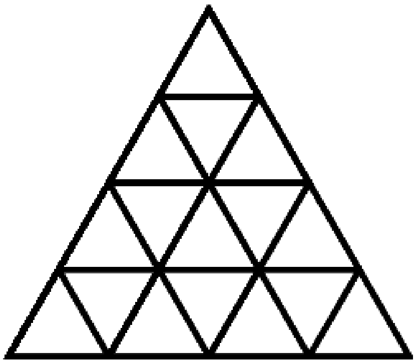
SOLUCION:

Sea “x” el número entero positivo que dijo Kenny.
$2016 = 3^2 x 7 x 2^5$ (Descomponiendo polinómicamente)
Planteando:
Kenny: x
Luis: (4 ó 8)x
Freddy: (3 ó 6)(4 ó 8)x
André: (7 ó 9)(3 ó 6)(4 ó 8)x
Raúl: (7 ó 8)(7 ó 9)(3 ó 6)(4 ó 8)x
8 7 3 4 (Escogiendo de manera adecuada los números)
El resultado final fue 2016.

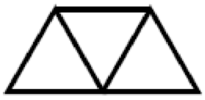
$$(8)(7)(3)(4)x = 2016$$
$$(8)(7)(3)(4)x = (3)(3)(7)(4)(8)$$
$$x = 3$$

RESPUESTA: El número que dijo Kenny fue 3.

6) Se tiene el siguiente tablero:

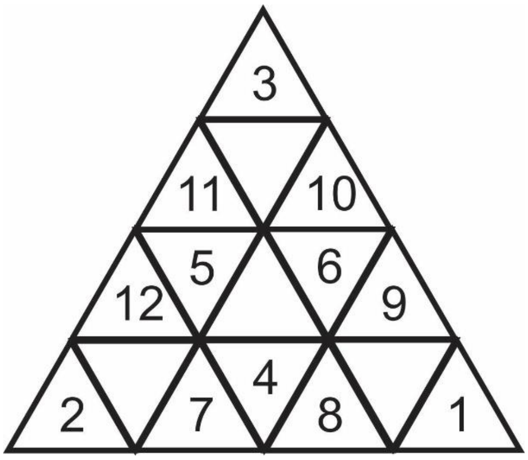


Y cinco fichas de la forma:

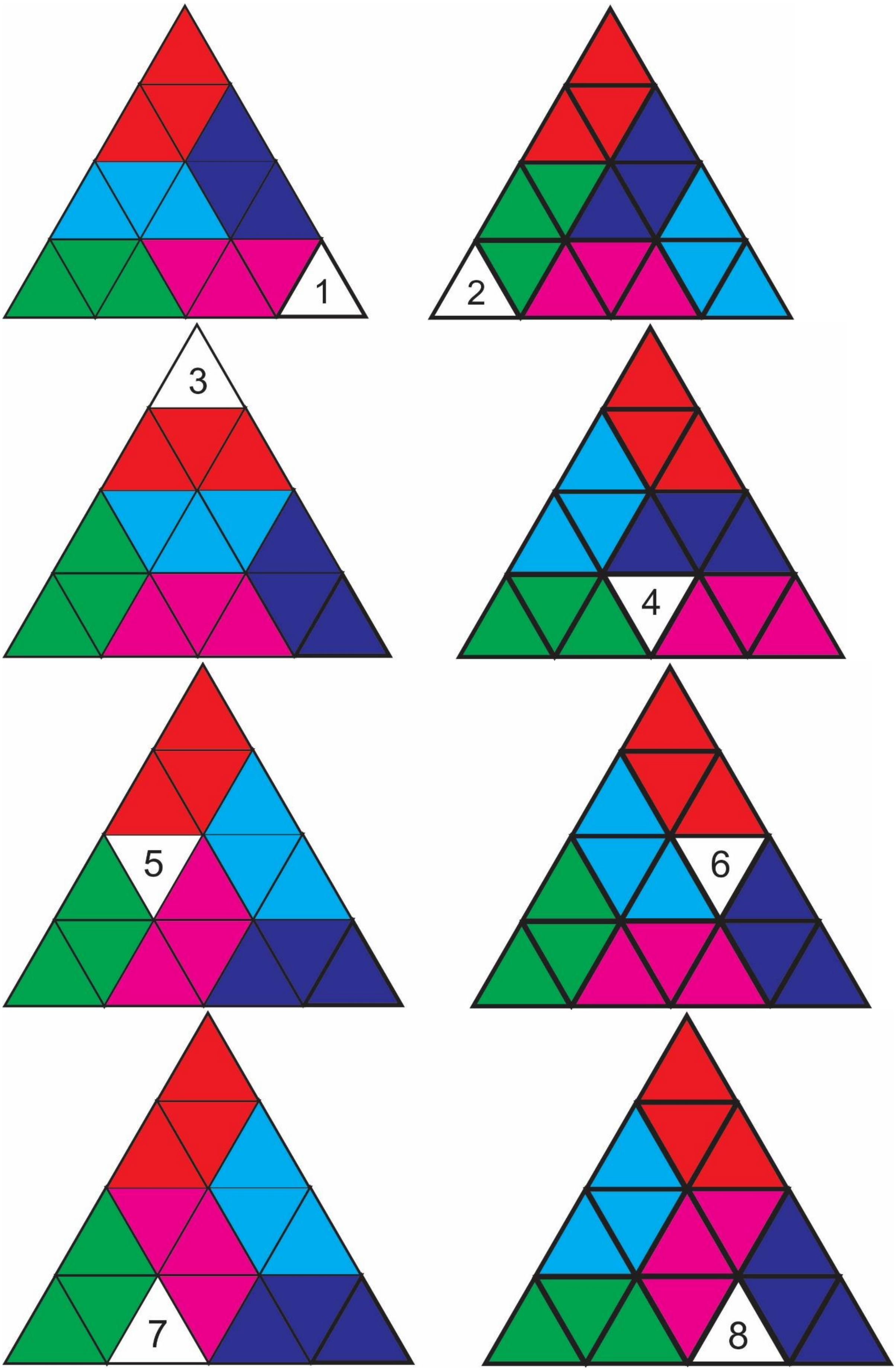


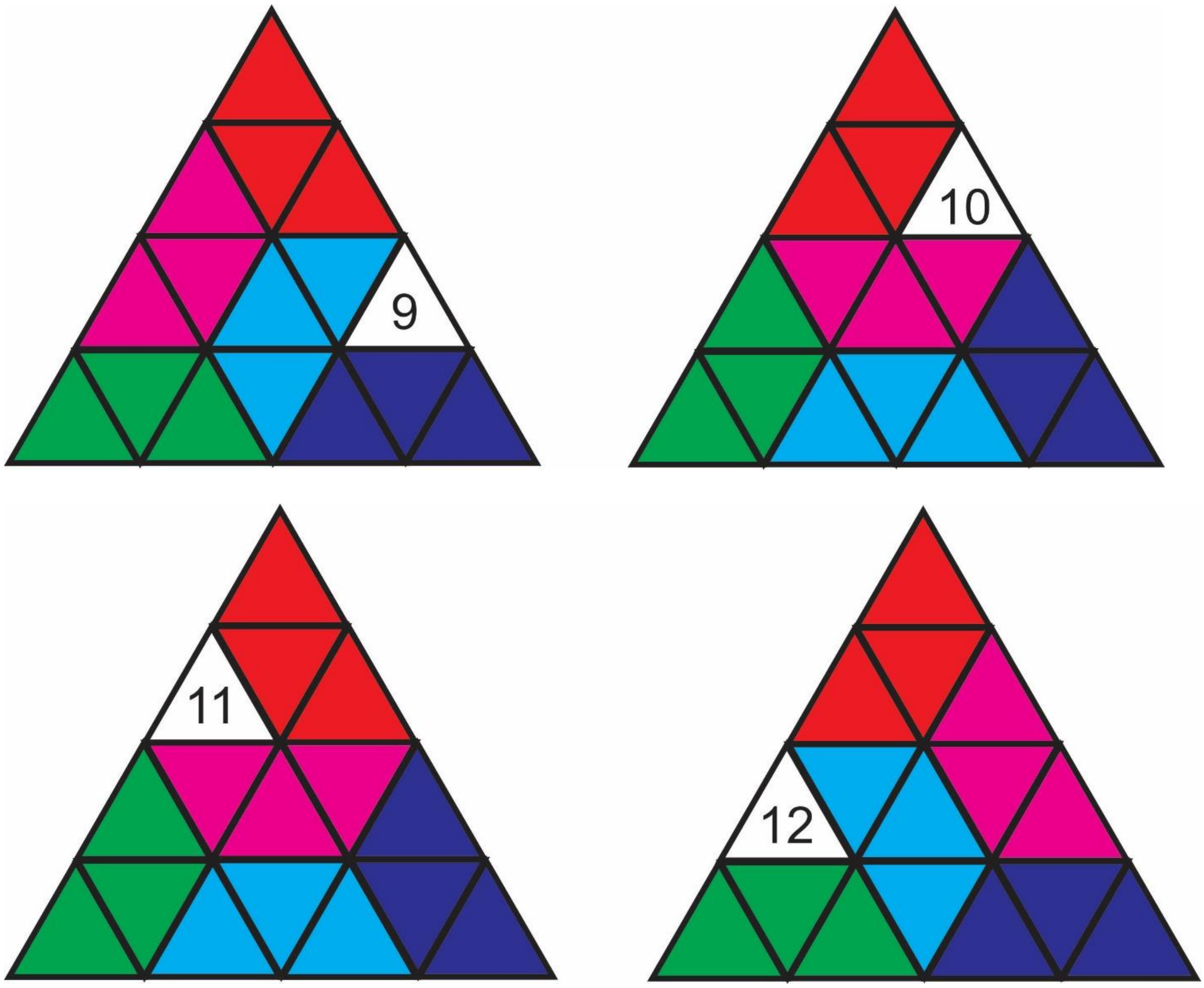
Cuando las fichas son colocadas sobre el tablero con el propósito de cubrirlo, queda un triángulo sin cubrir. Si las fichas se colocan de tal modo que no salgan del tablero y que no se superpongan, ¿Cuántos de los 16 triángulos podrían ser ese triángulo sin cubrir?

SOLUCION:
A continuación enumeramos los casilleros vacíos:



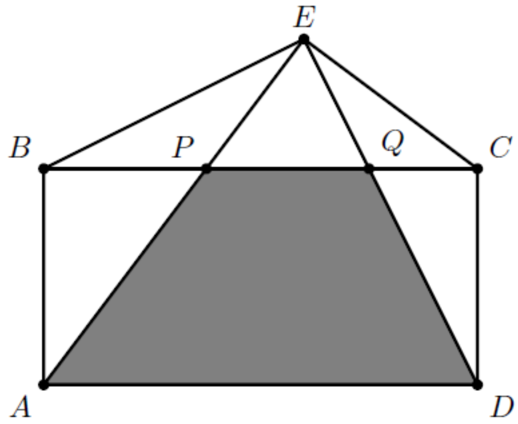
Viendo cada uno de los casos:





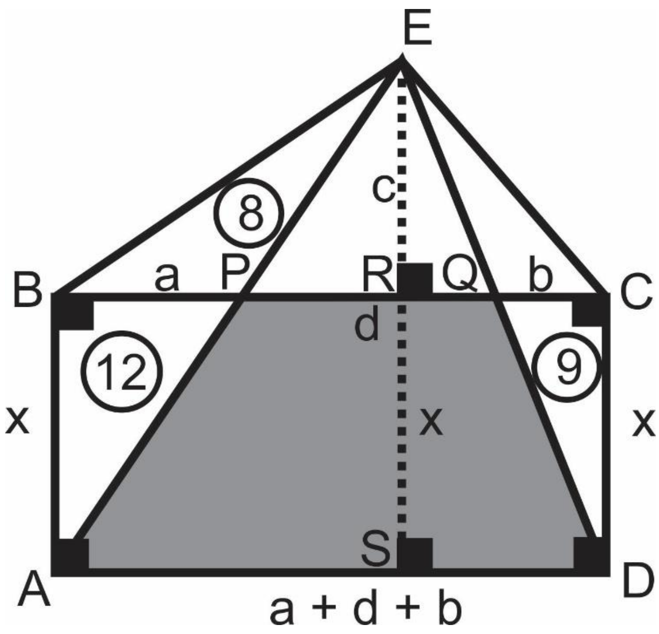
RESPUESTA: De 16 triángulos 12 triángulos quedan sin cubrir.

7) En la figura se muestra un rectángulo ABCD. Los segmentos EA y ED intersectan al segmento BC en P y Q, respectivamente. Las áreas de los triángulos ABP, BPE y CQD son 12 cm^2, 8 cm^2 y 9 cm^2, respectivamente. Calcule el área de la figura sombreada (en cm^2).



SOLUCION:

Graficando y asignando variables:



AB = x, y como los lados opuestos del rectángulo son congruentes (AB = RS = CD), se cumple: RS = x, CD = x. Además: BP = a, PQ = d, QC = b. Se traza la altura ES, asignado variable: ER = c. Como los lados opuestos del rectángulo son congruentes (BC = AD), se cumple: AD = a + d + b.

En el ∆PAB, se tiene:

$$\frac{(a)(x)}{2} = 12$$ Utilizando la fórmula para hallar el área de la región triangular

$$ax = 24$$

$$a = \frac{24}{x}$$ Despejando "a"

En el ∆QCD, se tiene:

$$\frac{(b)(x)}{2} = 9$$ Utilizando la fórmula para hallar el área de la región triangular

$$bx = 18$$

$$b = \frac{18}{x}$$ Despejando "b"

En el ∆BEP, se tiene:

$$\frac{(a)(c)}{2} = 8$$ Utilizando la fórmula para hallar el área de la región triangular. Reemplazando "a"

$$\left(\frac{24}{x}\right)c = 16$$

$$c = \frac{16x}{24}$$ Despejando "c"

$$c = \frac{2x}{3}$$

En el trapecio APQD, utilizando la fórmula para hallar el área del trapecio:

$$Area(TrapecioAPQD) = \frac{(a + d + b + d)x}{2}$$

$$Area(TrapecioAPQD) = \frac{(a + b + 2d)x}{2}$$

$$Area(TrapecioAPQD) = \frac{\left(\frac{24}{x} + \frac{18}{x} + 2d\right)x}{2}$$ Reemplazando a y b

$$Area(TrapecioAPQD) = \frac{\left(\frac{42}{x} + 2d\right)x}{2}$$

$$Area(TrapecioAPQD) = \frac{42 + 2dx}{2}$$

$$Area(TrapecioAPQD) = 21 + dx \dots (\alpha)$$

Halando el área del trapecio APQD, por diferencia de áreas:

$$Area(TrapecioAPQD) = Area\Delta DAE - Area\Delta QPE$$

$$Area(TrapecioAPQD) = \frac{(a+d+b)(c+x)}{2} - \frac{dc}{2}$$

Reemplazando:
a; b y c

$$Area(TrapecioAPQD) = \frac{\left(\frac{24}{x} + d + \frac{18}{x}\right)\left(\frac{2x}{3} + x\right)}{2} - \frac{d\left(\frac{2x}{3}\right)}{2}$$

$$Area(TrapecioAPQD) = \frac{\left(\frac{42}{x} + d\right)\left(\frac{5x}{3}\right)}{2} - \frac{2xd}{(2)(3)}$$

$$Area(TrapecioAPQD) = \left(\frac{42}{x} + d\right)\left(\frac{5x}{6}\right) - \frac{xd}{3}$$

$$Area(TrapecioAPQD) = \left(\frac{42}{x}\right)\left(\frac{5x}{6}\right) + d\left(\frac{5x}{6}\right) - \frac{xd}{3}$$

$$Area(TrapecioAPQD) = 35 + \frac{5xd}{6} - \frac{xd}{3}$$

$$Area(TrapecioAPQD) = 35 + \frac{3xd}{6}$$

$$Area(TrapecioAPQD) = 35 + \frac{xd}{2} \dots (\beta)$$

Igualando ambas ecuaciones: (α) = (β)

$$21 + dx = 35 + \frac{xd}{2}$$

$$dx - \frac{xd}{2} = 35 - 21$$

$$\frac{xd}{2} = 14$$
$$xd = 28$$

Reemplazando “xd” en (α):

$$Area(TrapecioAPQD) = 21 + dx$$

$$Area(TrapecioAPQD) = 21 + 28$$

$$Area(TrapecioAPQD) = 49$$

RESPUESTA: El área del trapecio APQD es 49 cm^2.

8) Sea A = (1 + 2)×(3 + 4)×(5 + 6)×…×(99 + 100). Encuentre el menor número impar N, con N > 1, tal que el máximo común divisor de N y A es 1.

SOLUCION:
Planteando:
A = (1 + 2)×(3 + 4)×(5 + 6)×…×(99 + 100)
A = (3)×(7)×(11)×…×(199)
Se observa que los factores forman una progresión aritmética cuya razón es 4.
Analizando cada factor:
1 + 2 = 3 (Número primo)
3 + 4 = 7 (Número primo)
5 + 6 = 11 (Número primo)
7 + 8 = 15 = 3×5
9 + 10 = 19 (Número primo)
11 + 12 = 23 (Número primo)
13 + 14 = 27 = 3×3×3
15 + 16 = 31 (Número primo)
17 + 18 = 35 = 7×5
19 + 20 = 39 = 3×13
21 + 22 = 43 (Número primo)
23 + 24 = 47 (Número primo)
25 + 26 = 51 = 3×17
27 + 28 = 55 = 11×5
29 + 30 = 59 (Número primo)
31 + 32 = 63 = 7×9
33 + 34 = 67 (Número primo)
35 + 36 = 71 (Número primo)
37 + 38 = 75 = 15×5
39 + 40 = 79 (Número primo)
41 + 42 = 83 (Número primo)
43 + 44 = 87 = 3×29
45 + 46 = 91 = 7×13
47 + 48 = 95 = 19×5
49 + 50 = 99 = 11×9
51 + 52 = 103 (Número primo)
53 + 54 = 107 (Número primo)
55 + 56 = 111 = 37×3
57 + 58 = 115 = 5×23
59 + 60 = 119 = 7×17
61 + 62 = 123 = 3×41
63 + 64 = 127 (Número primo)
65 + 66 = 131 (Número primo)
66 + 68 = 135 = 9×15
69 + 70 = 139 (Número primo)
71 + 72 = 143 = 11×13
73 + 74 = 147 = 3×49
75 + 76 = 151 (Número primo)
77 + 78 = 155 = 31×5
79 + 80 = 159 = 3×53
81 + 82 = 163 (Número primo)
83 + 84 = 167 (Número primo)
85 + 86 = 171 =3×57
87 + 88 = 175 = 5×35
89 + 90 = 179 (Número primo)
91 + 92 = 183 = 3×61
93 + 94 = 187 = 11×17
95 + 96 = 191 (Número primo)
97 + 98 = 195 = 3×5×13
99 + 100 = 199 (Número primo)

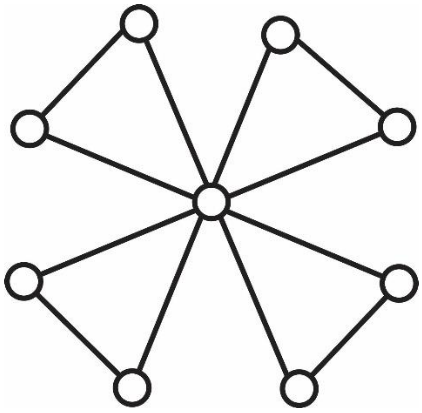
Tachando los factores comunes:

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
21=7×3	23	25=5×5	27	29	31	33	35	37	39
41	43	45=5×9	47	49=7×7	51=3×17	53	55	57=3×19	59
61	63=7×9	65=13×5	67	69=3×23	71	73	75	77	79

Por tanto N = 73 y es el menor número impar que no es factor común entre A y N.

RESPUESTA: 73 es el menor número impar, tal que el máximo común divisor de N y A es 1.

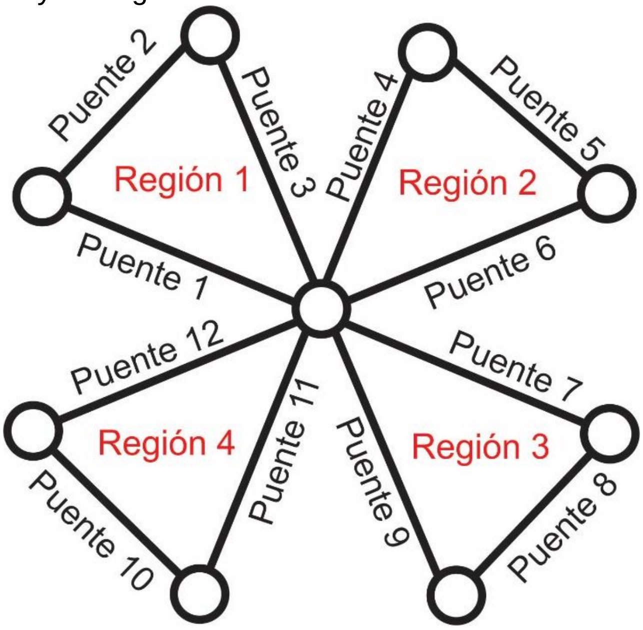
9) Un país se compone de 9 islas, algunas de las cuales están unidas por puentes, como muestra la siguiente figura (los círculos son las islas y las líneas son los puentes):



Se van a clausurar 4 puentes para hacer reparaciones, de tal modo que aún se pueda viajar desde cualquier isla a cualquier otra isla usando los 8 puentes que queden. ¿De cuántas formas se puede escoger esos 4 puentes?

SOLUCION:

Enumerando los puentes y las regiones:



Para que se puedan comunicar todas las islas quitando cuatro puentes, necesariamente se tiene que quitar sólo un puente de las tres que existen en cada una de las cuatro regiones. Además no importa el orden en que se la quiten. Por tanto es una combinación y utilizaremos el principio de multiplicación:

$$C_1^3 \times C_1^3 \times C_1^3 \times C_1^3$$

$$\frac{3!}{(3-1)! \times 1!} \times \frac{3!}{(3-1)! \times 1!} \times \frac{3!}{(3-1)! \times 1!} \times \frac{3!}{(3-1)! \times 1!}$$

$$\frac{6}{2! \times 1} \times \frac{6}{2! \times 1} \times \frac{6}{2! \times 1} \times \frac{6}{2! \times 1}$$

$$\frac{6}{2} \times \frac{6}{2} \times \frac{6}{2} \times \frac{6}{2}$$

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

RESPUESTA: Se pueden escoger los 4 puentes de 81 maneras.

10) Un número primo p es especial si existen números enteros a y b tales que $p^2 = a^3 + b^3$. Se sabe que hay tres números primos, menores que 300, que son especiales. Calcule la suma de esos tres números.

SOLUCION:
Tanteando con aquellos números que cumplen dicha condición:

$$p^2 = a^3 + b^3$$

- Primer número primo especial que cumple: 3
  $3^2 = 1^3 + 2^3$
  $9 = 1 + 8$
  $9 = 9$

- Segundo número primo especial que cumple: 13
  $13^2 = 8^3 + (-7)^3$
  $169 = 512 - 343$
  $169 = 169$

- Tercer número primo especial que cumple: 181
  $181^2 = 105^3 + (-104)^3$
  $32761 = 1157625 - 1124864$
  $32761 = 32761$

  Sumando los tres números: 3 + 13 + 181 = 197.

RESPUESTA: La suma de los tres números primos especiales es 197.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN