XIII Olimpiada Nacional Escolar de Matemática (ONEM 2016)
Segunda Fase - Nivel 3 – Solucionario.

1) Alejandra, Ruth y Edwin fueron al mercado para abastecer sus juguerías. Alejandra compró 2 piñas y 3 papayas. Ruth compró 5 piñas y 1 papaya. Edwin compró 4 piñas y 2 papayas. Si Alejandra gastó 42 soles y Ruth gastó 40 soles, ¿Cuántos soles gastó Edwin?
Aclaración: Considere que todas las piñas cuestan lo mismo y que todas las papayas cuestan lo mismo.

SOLUCION:
Planteando:
x: Precio unitario de la piña.
y: Precio unitario de la papaya.
Alejandra: $2x + 3y = 42$ … (α)
Ruth: $5x + y = 40$ … (β)
Edwin: $4x + 2y$

Planteando el sistema de ecuaciones de dos variables (α) y (β):

$$\begin{cases} 2x + 3y = 42 \\ 5x + y = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 42 \\ -15x - 3y = -120 \end{cases} \qquad \text{Multiplicando por } (-3)$$

Sumando ambos miembros:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 42 \\ -15x - 3y = -120 \end{cases}$$

$$2x - 15x = 42 - 120$$
$$-13x = -78$$
$$x = 6$$

Reemplazando "x" en (α):
$2x + 3y = 42$
$2(6) + 3y = 42$
$3y = 42 - 12$
$y = 30/3 = 10$

Hallando lo que gastó Edwin:
Edwin: $4(6) + 2(10)$
$24 + 20 = 44$

RESPUESTA: Edwin gastó S/ 44.

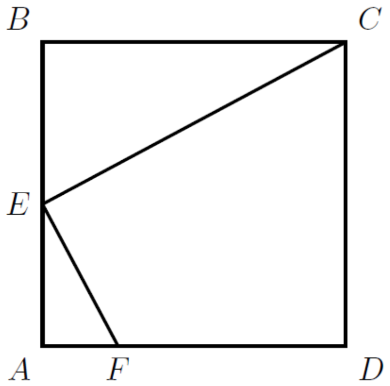
2) Gregorio tiene dos dados, uno rojo y otro azul. ¿Cuántas posibilidades existen, de que al lanzar Gregorio sus dos dados, obtenga dos números cuyo producto sea par?

SOLUCION:
Hallando el espacio muestral:
Ω = {(R1; A1), (R1; A2), (R1; A3), (R1; A4), (R1; A5), (R1; A6),
(R2; A1), (R2; A2), (R2; A3), (R2; A4), (R2; A5), (R2; A6),
(R3; A1), (R3; A2), (R3; A3), (R3; A4), (R3; A5), (R3; A6),
(R4; A1), (R4; A2), (R4; A3), (R4; A4), (R4; A5), (R4; A6),
(R5; A1), (R5; A2), (R5; A3), (R5; A4), (R5; A5), (R5; A6),
(R6; A1), (R6; A2), (R6; A3), (R6; A4), (R6; A5), (R6; A6)}

Los que están sombreados de color verde, son los que al multiplicar los números de dichos dados resulta un número par. Total = 27.

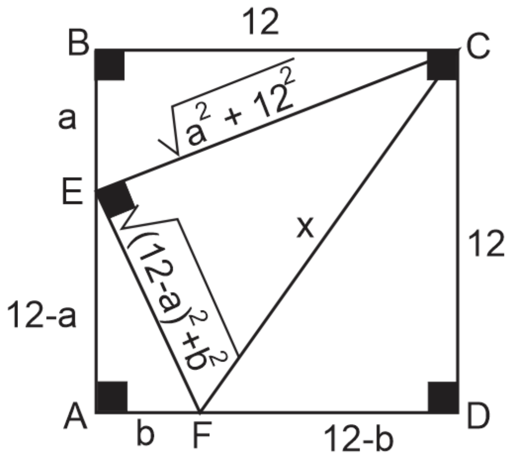
RESPUESTA: Existen 27 posibilidades que al lanzar los dados se obtenga dos números cuyo producto sea par.

3) Sea ABCD un cuadrado de lado 12. Sean E y F puntos de los lados AB y AD, respectivamente, tales que ∠CEF = 90°. Si el área del triángulo CBE es igual a 4 veces el área del triángulo EAF, halla la longitud del segmento CF.



SOLUCION:

Graficando se tiene:



Asignando algunas variables:
Si: BE = a, entonces EF = 12 – a.
Si: AF = b, entonces FD = 12 – b.
CF = x
En el ∆BEC la hipotenusa estará dado por (Teorema de Pitágoras):

$$EC = \sqrt{a^2 + 12^2}$$

En el ∆AFE la hipotenusa estará dado por (Teorema de Pitágoras):

$$EF = \sqrt{(12-a)^2 + b^2}$$

En el ∆CDF la hipotenusa estará dado por (Teorema de Pitágoras):

$$x^2 = (12-b)^2 + 12^2 \dots .(\alpha)$$

Por dato del problema se tiene:

Área ∆CBE = 4(Área ∆EAF)

$$\frac{a \times 12}{2} = \frac{4(12-a)b}{2}$$

$$12a = 4b(12-a)$$

$$3a = b(12-a)$$

$$3a = 12b - ab$$

$$3a + ab = 12b$$
$$a(3+b) = 12b$$
$$a = \frac{12b}{b+3} \ldots .(\theta)$$

En el ∆FEC la hipotenusa estará dado por (Teorema de Pitágoras):

$$x^2 = \left(\sqrt{a^2+12^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(12-a)^2+b^2}\right)^2$$
$$x^2 = a^2 + 12^2 + (12-a)^2 + b^2 \ldots ..(\beta)$$

$$(\alpha) = (\beta)$$
$$(12-b)^2 + 12^2 = a^2 + 12^2 + (12-a)^2 + b^2$$
$$144 - 24b + b^2 + 144 = a^2 + 144 + 144 - 24a + a^2 + b^2$$
$$-24b + b^2 = a^2 - 24a + a^2 + b^2$$
$$-24b = 2a^2 - 24a$$
$$-12b = a^2 - 12a$$

Reemplazando (θ)

$$-12b = a^2 - 12a$$
$$-12b = \left(\frac{12b}{b+3}\right)^2 - 12\left(\frac{12b}{b+3}\right)$$
$$-12b = \frac{12b \times 12b}{(b+3)^2} - \frac{12 \times 12b}{b+3}$$
$$-1 = \frac{12b}{(b+3)^2} - \frac{12}{b+3} \qquad \text{Dividiendo entre: 12b}$$
$$-1 = \frac{12b}{(b+3)^2} - \frac{12(b+3)}{(b+3)(b+3)}$$
$$-1 = \frac{12b - 12b - 36}{(b+3)^2}$$
$$-1 = \frac{-36}{(b+3)^2}$$
$$(b+3)^2 = 36$$
$$b + 3 = 6$$
$$b = 3$$

Reemplazando “b” en (α)

$$x^2 = (12-b)^2 + 12^2$$
$$x^2 = (12-3)^2 + 12^2$$
$$x^2 = 9^2 + 12^2$$
$$x^2 = 81 + 144$$
$$x = \sqrt{225}$$
$$x = 15$$

RESPUESTA: La longitud del segmento CF es 15

4) ¿Cuál es el menor número entero positivo, múltiplo de 4, tal que el producto de sus dígitos es 2016?

SOLUCION:

Sea el número:

$x = \overset{o}{4}$

Producto de cifras de "x" es 2016

Descomponiendo polinómicamente el número 2016:

$2016 = 2^5 x 3^2 x 7$

2016 = 2x2x2x2x2x3x3x7

2016 = 2x3x7x2x3x2x2x2 ordenando de manera conveniente

2016 = 6x7x6x8

Por tanto: x = 6768

Criterio de divisibilidad por cuatro: Las dos últimas cifras es un múltiplo de cuatro.

$68 = \overset{o}{4}$, porque 4(17) = 68

RESPUESTA: El número 6768 es el menor número entero positivo, múltiplo de 4, tal que el producto de sus dígitos es 2016.

5) Un conjunto A está formado por 10 números reales (distintos), de tal modo que la suma de cualesquiera seis de ellos es mayor que la suma de los otros cuatro elementos. ¿Cuál es la menor cantidad de elementos positivos que puede tener el conjunto A?

SOLUCION:

El conjunto A está formado por:

A = {n1; n2; n3; n4; n5; n6; n7; n8; n9; n10} $A \subset R$; R: Números Reales.

Debe cumplirse:

Sumatoria (6 números) > Sumatoria (otros 4 números)

- Vamos a probar que los diez números son positivos.
  Para ello vamos asumir que están en progresión aritmética:
  A = {n; n+r; n+2r; n+3r; n+4r; n+5r; n+6r; n+7r; n+8r; n+9r} $r > 0$; $n \in R$
  Vamos a sumar los números menores para comparar con los mayores:
  n + (n+r) + (n+2r) + (n+3r) + (n+4r) + (n+5r) > (n+6r) + (n+7r) + (n+8r) + (n+9r)
  6n + 15r > 4n + 30r
  2n > 15r
  Probemos un ejemplo: n = 8, r = 1
  A = {8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17}
  8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 > 14 + 15 + 16 + 17
  63 > 62 ¡Cumple!

- Ahora vamos a probar que los nueve números son positivos y uno negativo.
  Para ello vamos asumir que están en progresión aritmética:
  A = {a; n; n+r; n+2r; n+3r; n+4r; n+5r; n+6r; n+7r; n+8r} $r > 0$; $a < 0$; $n \in R$
  Vamos a sumar los números menores para comparar con los mayores:
  a + n + (n+r) + (n+2r) + (n+3r) + (n+4r) > (n+5r) + (n+6r) + (n+7r) + (n+8r)
  a + 5n + 10r > 4n + 26r
  a + n > 16r
  Probemos un ejemplo: n = 20, r = 1
  A = {a; 20; 21; 22; 23; 24; 25; 26; 27; 28; 29}
  a + 20 + 21 + 22 + 23 + 24 > 25 + 26 + 27 + 28
  a + 110 > 106
  "a" podría tomar valores negativos: a = {–1; –2; –3} ¡Cumple!

- Ahora vamos a probar que los ocho números son positivos y dos negativos.
  Para ello vamos asumir que están en progresión aritmética:
  A = {a; b; n; n+r; n+2r; n+3r; n+4r; n+5r; n+6r; n+7r} $r>0$; $a<0$; $b<0$; $n \in R$
  Vamos a sumar los números menores para comparar con los mayores:
  a + b + n + (n+r) + (n+2r) + (n+3r) > (n+4r) + (n+5r) + (n+6r) + (n+7r)

a + b + 4n + 6r > 4n + 22r

a + b > 16r

Como hemos asumido que a y b son números menores que cero, la inecuación anterior es inconsistente porque la suma de dos números negativos no es mayor que un número positivo.
Por tanto, los elementos del conjunto “A” no puede tener dos números negativos.
Finalmente se concluye que el conjunto “A” a lo más puede tener un elemento negativo.

RESPUESTA: La menor cantidad de elementos positivos que puede tener el conjunto A es 9

6) Determina el menor número entero n, con n > 1, tal que los dos números: $\sqrt{\frac{n+1}{2}}$ y $\sqrt{\frac{n+2}{3}}$ son racionales.

SOLUCION:

Planteando la ecuación:

$$\sqrt{\frac{n+1}{2}} = k$$

$$\frac{n+1}{2} = k^2$$

$$n + 1 = 2k^2$$
$$n = 2k^2 - 1 \; \dots (\alpha)$$

Planteando la ecuación:

$$\sqrt{\frac{n+2}{3}} = p$$

$$\frac{n+2}{3} = p^2$$

$$n + 2 = 3p^2$$
$$n = 3p^2 - 2 \; \dots (\beta)$$

(α) = (β)

$$2k^2 - 1 = 3p^2 - 2$$
$$2k^2 + 1 = 3p^2$$

Tabulando: k = 11

$$2(11)^2 + 1 = 3p^2$$
$$2(121) + 1 = 3p^2$$
$$\frac{243}{3} = p^2$$
$$\sqrt{81} = p$$
$$9 = p$$

Reemplazando “k” en (α)

$$n = 2k^2 - 1$$
$$n = 2(11)^2 - 1$$
$$n = 2(121) - 1$$
$$n = 242 - 1$$
$$n = 241$$

Reemplazando “p” en (β)

$$n = 3p^2 - 2$$
$$n = 3(9)^2 - 2$$
$$n = 3(81) - 2$$

$$n = 243 - 2$$
$$n = 241$$

RESPUESTA: El menor número entero "n" es 241.

7) ¿Cuántos números enteros positivos menores que $2^{16} + 2^{15}$ se pueden expresar como la suma de cinco potencias de 2, todas diferentes entre sí?
Aclaración: Considere que las potencias de 2 son 2^0; 2^1; 2^2; 2^3;…

SOLUCION:
Planteando:
$X < 2^{16} + 2^{15}$
$X = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3$;… Suma de cinco potencias de 2, todas diferentes entre sí
Podemos decir que los exponentes de las potencias de 2 podrían estar comprendidos entre 0 y 16, pero tienen que ser diferentes entre sí y menor que $2^{16} + 2^{15}$
Vamos a trabajar con los exponentes ya que la base siempre será el 2.
Se tiene que elegir 5 exponentes diferentes comprendidos entre de 0 a 15 (En total 16) y esto obedece a una combinación sin repetición, porque no importa el orden de sus elementos (El orden de los sumandos no altera la suma)
Combinación:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$\binom{16}{5} = \frac{16!}{(16-5)! \times 5!}$$

$$\binom{16}{5} = \frac{16!}{(11)! \times 5!}$$

$$\binom{16}{5} = \frac{16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11!}{11! \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$\binom{16}{5} = \frac{16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$\binom{16}{5} = 2 \times 14 \times 13 \times 12$$

$$\binom{16}{5} = 4368$$

Ahora vamos a ver cuando uno de los sumandos es 2^{16}, es decir, que se tendría que elegir 4 exponentes diferentes comprendidos entre de 0 a 14 (En total 15).

$$\binom{15}{4} = \frac{15!}{(15-4)! \times 4!}$$

$$\binom{15}{4} = \frac{15!}{(11)! \times 4!}$$

$$\binom{15}{4} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11!}{11! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$\binom{15}{4} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$\binom{15}{4} = 5 \times 7 \times 13 \times 3$$

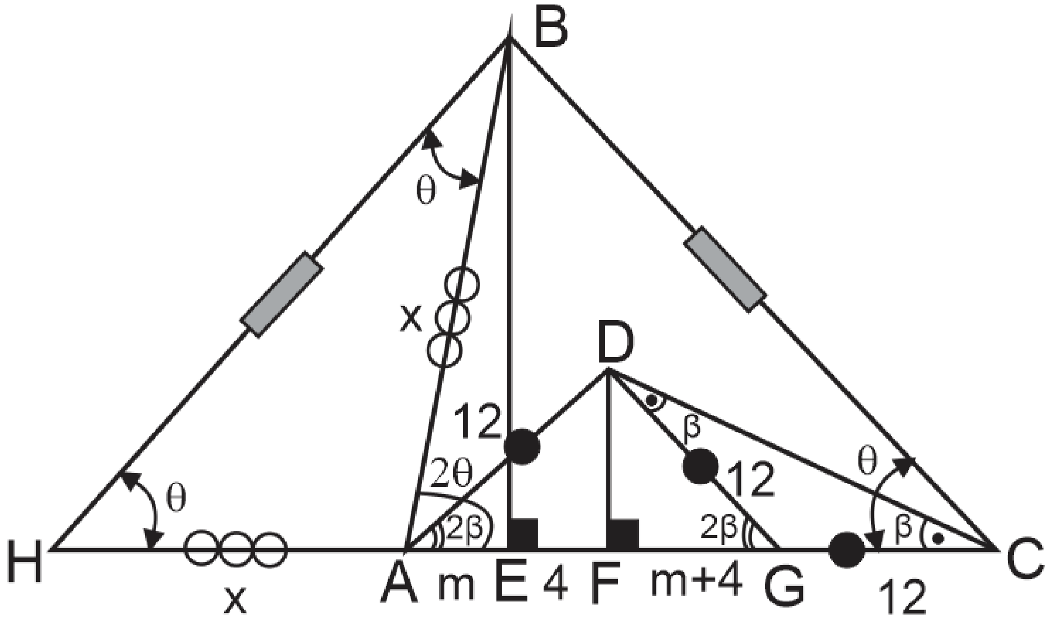
$$\binom{15}{4} = 1365$$

En total se tendría: 4368 + 1365 = 5733

RESPUESTA: 5733 números enteros positivos menores que $2^{16} + 2^{15}$ se pueden expresar como la suma de cinco potencias de 2, todas diferentes entre sí.

8) Sea ABC un triángulo acutángulo tal que ∠BAC = 2∠BCA. Sea D un punto interior tal que ∠DAC = 2∠DCA. Sean E y F los pies de las alturas trazadas desde B y D hacia el lado AC, respectivamente. Si AD = 12 y EF = 4, halla la longitud del lado AB.

SOLUCION:
Graficando se tiene:



Asignando algunas variables:
AE = m, AB = x
Si: m∠BCA = θ. Se cumple: m∠BAC = 2θ.
Si: m∠DCA = β. Se cumple: m∠DAC = 2β.
Trazamos el segmento DG con la condición de que m∠CDG = β.
En el ΔDAG, m∠DGA = 2β (Suma de ángulos internos del ΔDGC). Por tanto el ΔDAG es isósceles: DA = DG = 12, y también: AF = FG = m + 4.
También el ΔDCG es isósceles: DG = GC = 12
Ahora trazamos los segmentos BH Y HA con la condición de que m∠BHA = θ. Por tanto m∠HBA = θ.
Se concluye que el ΔHBC es isósceles, por tanto:

$$HE = EC$$
$$x + m = 4 + m + 4 + 12$$
$$x = 20$$

RESPUESTA: La longitud del lado AB es 20.

9) Sean x; y números reales positivos tales que $x^3 + y^3 = 3xy$. Sea M el mayor valor que puede tomar x. Determina el valor de $12.M^{12}$.

SOLUCION:

Plateando:

x = M (El mayor valor que puede tomar “x” es “M”)

Reemplazando se tiene:

$x^3 + y^3 = 3xy$

$M^3 + y^3 = 3My$

$y^3 – 3My + M^3 = 0$

Asignando variables se tiene:

$–3M = p$

$M^3 = q$

Reemplazando se tiene:

$y^3 + py + q = 0$

Se sabe por la fórmula de Cardano:

Dada la expresión:

$y^3 + py + q = 0$

Una de las raíces está dado por:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

Es el discriminante (Δ) de la ecuación cúbica: $y^3 + py + q = 0$

PROPIEDADES:

Dada la ecuación: $y^3 + py + q = 0$, donde “p” y “q” son números reales.

I. Si: $\Delta < 0$, entonces, las tres raíces son reales y diferentes.
II. Si: $\Delta = 0$, entonces, las tres raíces son reales y dos de ellas iguales.
III. Si: $\Delta > 0$, entonces, una raíz es real y las otras dos son imaginarias.

Por tanto, la discriminante es igual a cero ($\Delta = 0$)

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

$$0 = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

Reemplazando: “p” y “q”.

$$0 = \left(\frac{M^3}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3M}{3}\right)^3$$

$$0 = \frac{M^6}{4} - M^3$$

$$0 = M^3\left(\frac{M^3}{4} - 1\right)$$

$$M^3 = 0 \;\; \text{ó} \;\; \frac{M^3}{4} - 1 = 0$$

$$M = 0 \ \text{ ó } \ \frac{M^3}{4} = 1$$

$$M = 0 \ \text{ ó } \ M^3 = 4$$
$$M = 0 \ \text{ ó } \ M = \sqrt[3]{4}$$

Descartamos el valor de cero (0) porque "x" es un número real positivo. Por tanto:

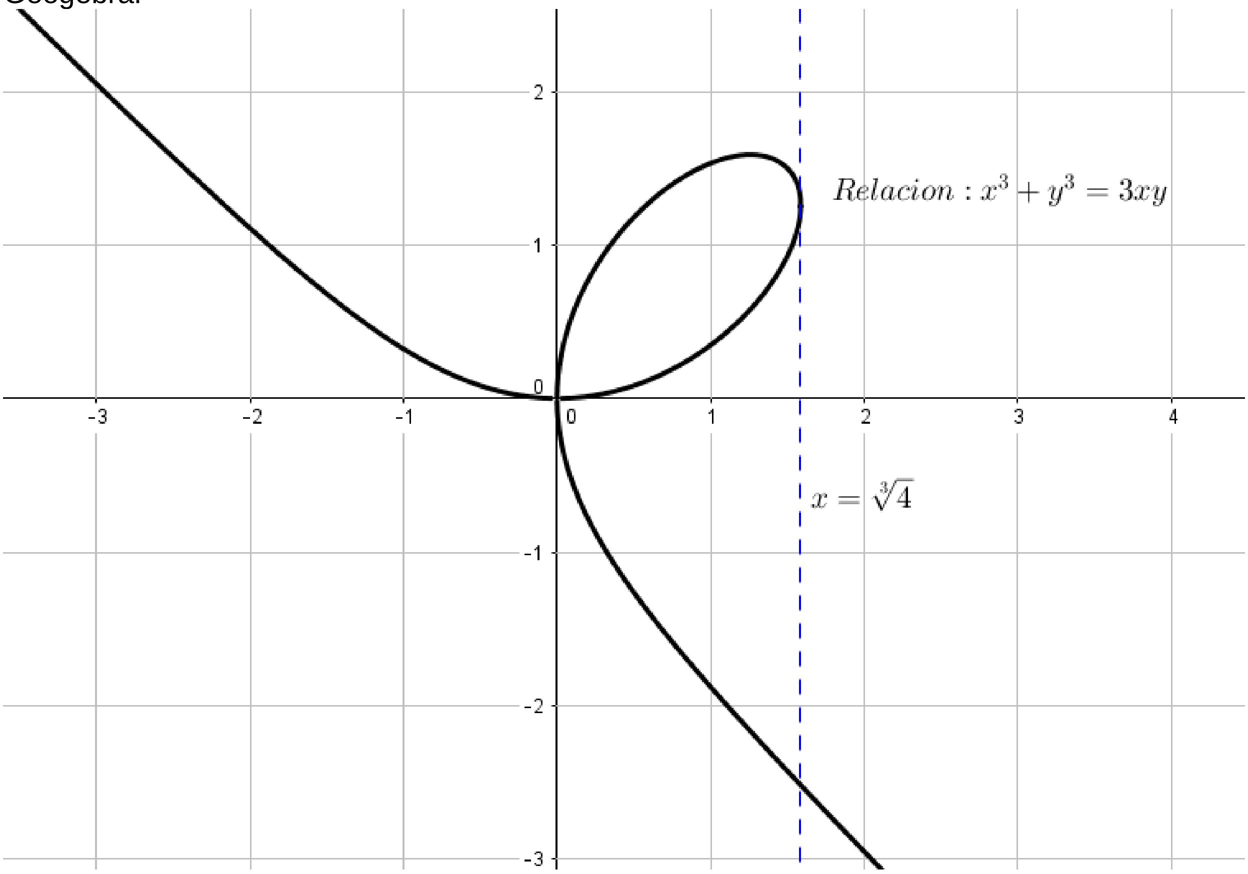
$$M = \sqrt[3]{4}$$

Nos piden hallar: 12.M^{12}.

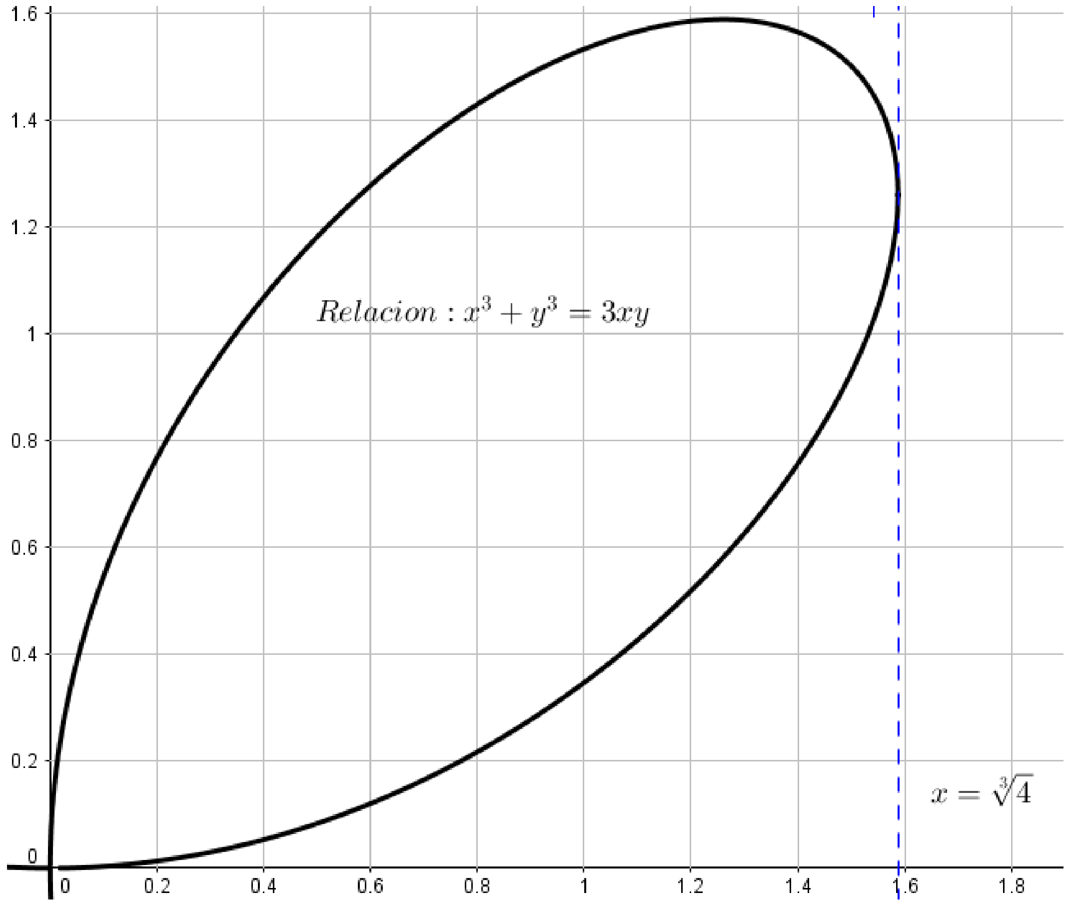
$$12\left(\sqrt[3]{4}\right)^{12}$$
$$12(4)^4$$
$$12(256)$$
$$3072$$

ALGO ADICIONAL:

Para entender mejor el problema, vamos a graficar la expresión ($x^3 + y^3 = 3xy$) utilizando el Geogebra:



La solución está en el primer cuadrante:



En la gráfica se observa que el máximo valor de "x" es $\sqrt[3]{4}$ cuando "y" también es positivo.

RESPUESTA: El valor de $12.M^{12}$ es 3072.

10) En la pizarra están escritos los números 1 y 2. En cada paso, si en la pizarra están escritos los números m y n, Julián escribe el número mn +m+ n en la pizarra y luego borra uno de los dos números anteriores (es decir, borra m o borra n). ¿Cuál es el menor número, mayor que 1000, que puede obtener Julián después de realizar algunos pasos?

SOLUCION:

Están escritos en la pizarra los números:

1; 2

Julián escribe: mn + m + n

(1)(2) + 1 + 2 = 5

En la pizarra están escritos:

1; 2; 5

Borramos en número 2, quedando los números:

1; 5

Julián escribe: (1)(5) + 1 + 5 = 11

En la pizarra están escritos:

1; 5; 11

Borramos en número 5, quedando los números:

1; 11

Julián escribe: (1)(11) + 1 + 11 = 23

En la pizarra están escritos:

1; 11; 23

Borramos en número 11, quedando los números:

1; 23

Julián escribe: (1)(23) + 1 + 23 = 47
En la pizarra están escritos:

1; 23; 47

Borramos en número 1, quedando los números:

23; 47

Julián escribe: (23)(47) + 23 + 47 = 1151

RESPUESTA: 1151 es el menor número, mayor que 1000, que puede obtener Julián después de realizar cinco pasos.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN