XIII Olimpiada Nacional Escolar de Matemática (ONEM 2016)
Segunda Fase - Nivel 2 – Solucionario.

1) En los exámenes del primer bimestre Paola obtuvo 13 como nota promedio de los cursos de Historia, Inglés, Comunicación y Matemática. En el segundo bimestre ella aumentó 1 punto en Historia, 2 puntos en Inglés, 2 puntos en Comunicación y 3 puntos en Matemática, con respecto al bimestre anterior. ¿Cuál fue la nota promedio de Paola de estos cuatro cursos en el segundo bimestre?

SOLUCION:
Planteando:
Sea “X” la nota promedio de Paola de estos cuatro cursos en el II Bimestre.
I Bimestre:

$$\frac{H+I+C+M}{4}=13$$

$$H+I+C+M=52 \;\ldots(\alpha)$$

II Bimestre:

$$\frac{(H+1)+(I+2)+(C+2)+(M+3)}{4}=X$$

$$\frac{(H+I+C+M)+(1+2+2+3)}{4}=X$$

Reemplazando (α)

$$\frac{52+8}{4}=X$$

$$\frac{60}{4}=X$$
$$15=X$$

RESPUESTA: La nota promedio de Paola de estos cuatro cursos (Historia, Inglés, Comunicación y Matemática) en el segundo bimestre fue 15.

2) Un fabricante de perfume decidió reducir en 10 ml la cantidad de perfume de cada frasco. Al hacer esto, resulta que el contenido de 25 frascos equivale al contenido de 20 frascos antes de la reducción. ¿Cuántos ml de perfume contenía cada frasco al inicio?

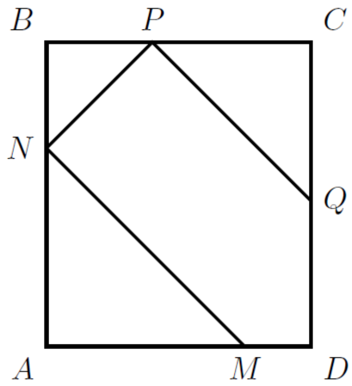
SOLUCION:
Cantidad en ml de perfume que contenía cada frasco al inicio: x

Planteando la ecuación:

$$25(x-10)=20x$$
$$25x-250=20x$$
$$25x-20x=250$$
$$5x=250$$
$$x=50$$

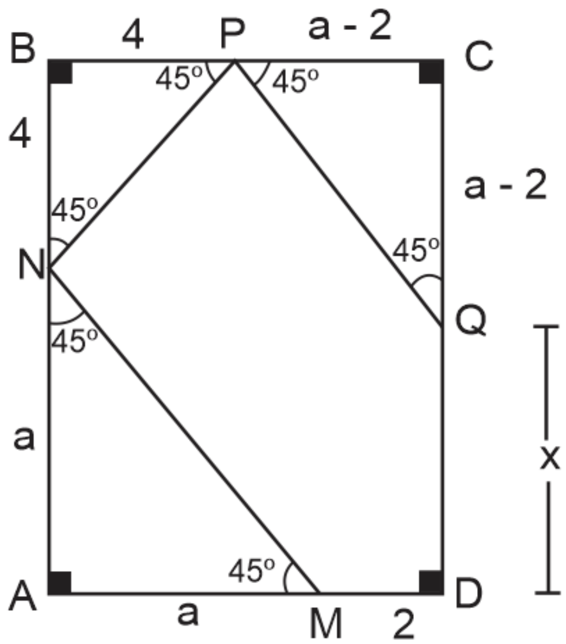
RESPUESTA: Al inicio cada frasco tenía 50 ml de perfume.

3) Sean M; N; P; Q puntos de los lados DA; AB; BC; CD de un rectángulo ABCD, respectivamente, tales que MN; NP; PQ forman ángulos de 45º con los lados del rectángulo. Si MD = 2 y BN = 4, determine la longitud del segmento QD.



SOLUCION:

Graficando:



Los triángulos AMN, BNP y CQP son triángulos rectángulos isósceles.
Si: QD = x y AM = a, entonces NA = a, por tanto PC = a – 2 y CQ = a – 2.
Como ABCD es un rectángulo, entonces se cumple:

$$BA = CD$$
$$a + 4 = a - 2 + x$$
$$4 + 2 = x$$
$$6 = x$$

RESPUESTA: La longitud del segmento QD es 6 unidades lineales.

4) ¿Cuál es el menor número entero positivo, múltiplo de 3, tal que el producto de sus dígitos es 2016?

SOLUCION:

Sea el número:

$$x = \overset{o}{3}$$

Producto de cifras de “x” es 2016
Descomponiendo polinómicamente el número 2016:

$2016 = 2^5 x 3^2 x 7$
2016 = 2x2x2x2x2x3x3x7
2016 = 2x3x2x3x2x2x2x7 ordenando de manera conveniente
2016 = 6x6x8x7
2016 = 6x6x7x8 ordenando para que sea menor

Suma de cifras: 6 + 6 + 7 + 8 = 27 = Es múltiplo de tres.

RESPUESTA: El número 6678 es el menor número entero positivo, múltiplo de 3, tal que el producto de sus dígitos es 2016.

5) Los asientos de un auditorio están distribuidos en m filas y n columnas. Durante un seminario se observó que en cada fila había dos asientos vacíos y en cada columna había un asiento vacío. Halle el número total de asientos del auditorio si se sabe que este número es mayor que 350 y menor que 400.

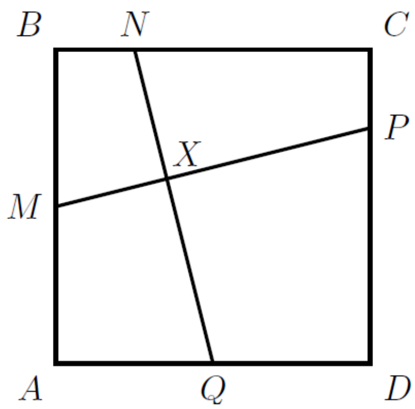
SOLUCION:
Graficando:

1	2	3	4	5	6	7	8	…	n
2									
3									
4									
⋮									
m									

Los asientos vacíos están sombreados.
Número total de asientos: X
350 < X < 400. También: X = m.n
“m” filas
“n” columnas
En un tablero de 1x2 = 2 asientos en total.
En un tablero de 2x4 = 8 asientos en total.
En un tablero de 3x6 = 18 asientos en total.
En un tablero de 4x8 = 32 asientos en total.
En un tablero de 5x10 = 50 asientos en total.
En un tablero de 6x12 = 72 asientos en total.
En un tablero de 7x14 = 98 asientos en total.
En un tablero de 8x16 = 128 asientos en total.
En un tablero de 9x18 = 162 asientos en total.
En un tablero de 10x20 = 200 asientos en total.
En un tablero de 11x22 = 242 asientos en total.
En un tablero de 12x24 = 288 asientos en total.
En un tablero de 13x26 = 338 asientos en total.
En un tablero de 14x28 = 392 asientos en total.
También podemos decir que hay 14 filas y 28 columnas.

RESPUESTA: El número total de asientos del auditorio es 392.

6) Sea ABCD un cuadrado de lado 8. Si AM = AQ = 4 cm y BN = CP = 2 cm, halle la diferencia de las áreas de los cuadriláteros PDQX y MBNX, en cm^2.



SOLUCION:

Planteado:

Si: AM = 4, entonces: MB = 4. Si: AQ = 4, entonces: QD = 4.

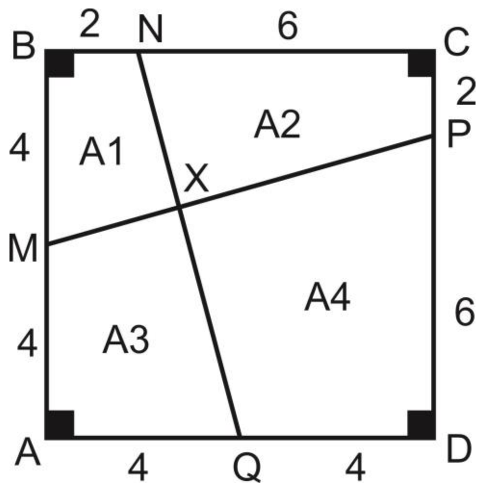
Si: BN = 2, entonces: NC = 6. Si: CP = 2, entonces: PD = 6.

Asignando variables a cada una de las áreas de las regiones:

A1 = MBNX, A2 = XNCP, A3 = AMXQ, A4 = PDQX

Nos piden hallar la diferencia de las áreas de los cuadriláteros PDQX y MBNX, es decir:

A4 – A1



Se sabe que el área de un trapecio está dato por:

$$Area\ Trapecio = \frac{(Base\ mayor + Base\ menor)Altura}{2}$$

$$A1 + A2 = \frac{(4+2)8}{2} = 6 \times 4 = 24$$

$$A2 + A4 = \frac{(6+4)8}{2} = 10 \times 4 = 40$$

Por tanto se tiene:

$$\begin{cases} A1 + A2 = 24 \\ A2 + A4 = 40 \end{cases}$$

Multiplicando por (–1) a la primera ecuación y sumando:

$$\begin{cases} -A1 - A2 = -24 \\ \underline{\ \ A2 + A4 = \ \ 40} \end{cases}$$

A4 – A1 = 40 – 24

A4 – A1 = 16

RESPUESTA: la diferencia de las áreas de los cuadriláteros PDQX y MBNX es 16 cm^2.

7) Sean x, y, z números reales tales que:

$$x^2 + 5xz + z^2 = 7$$
$$x^2z + xz^2 = 2$$

Si: $x + z \neq 2$, determina el valor de $(6xz)^2$.

SOLUCION:

Trabajando la ecuación:

$$x^2z + xz^2 = 2$$
$$xz(x+z) = 2$$
$$(x+z) = \frac{2}{xz}$$

$$(x+z)^2 = \frac{4}{(xz)^2} \ldots (1) \qquad \text{Elevando al cuadrado}$$

Trabajando ahora la otra ecuación:

$$x^2 + 5xz + z^2 = 7$$
$$(x^2 + 2xz + z^2) + 3xz = 7$$
$$(x+z)^2 + 3xz = 7 \qquad \text{Trinomio cuadrado perfecto}$$
$$\frac{4}{(xz)^2} + 3(xz) = 7 \qquad \text{Reemplazando la ecuación (1)}$$

$$4 + 3(xz)^3 = 7(xz)^2$$
$$3(xz)^3 - 7(xz)^2 + 4 = 0$$
$$(3xz+2)(xz-2)(xz-1) = 0 \qquad \text{Factorizando}$$
$$3xz + 2 = 0 \ \text{ ó } \ xz - 2 = 0 \ \text{ ó } \ xz - 1 = 0$$
$$xz = \frac{-2}{3} \ \text{ ó } \ xz = 2 \ \text{ ó } \ xz = 1$$

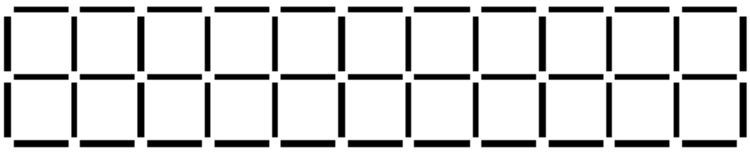
“xz” no podría ser igual a 2 porque “x” y “z” saldrían con números imaginarios.
“xz” no podría ser igual a 1 porque se cumpliría que: “x + z = 2”.
Por tanto: xz = –2/3. Porque sus valores de “x” y “z” serán números reales.
Hallando el valor de: $(6xz)^2$.

$$(6xz)^2$$
$$\left(6 \times \frac{-2}{3}\right)^2 \qquad \text{Reemplazando “xz”}$$
$$(2 \times -2)^2$$
$$(-4)^2$$
$$16$$

RESPUESTA: El valor de $(6xz)^2$ es 16

.

8) Se tiene 57 palitos que están distribuidos de la siguiente manera:



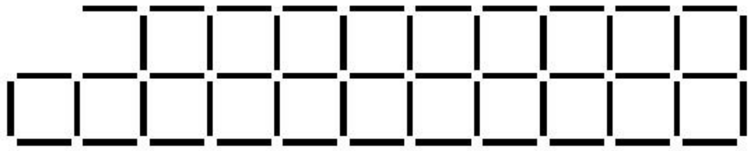
Un *movimiento* consiste en quitar 3 palitos que formen alguna de las siguientes figuras:

¿Cuál es la mayor cantidad de movimientos seguidos que se puede realizar?

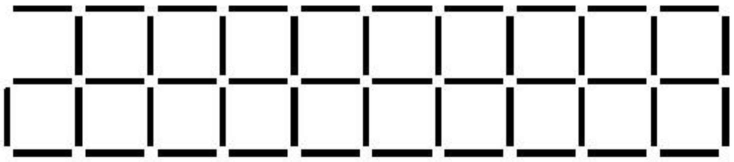
SOLUCION:

Hay varias soluciones, pero proponemos la siguiente:

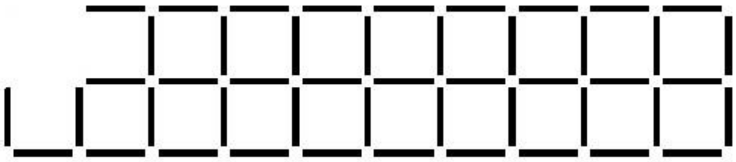
Movimiento 1:



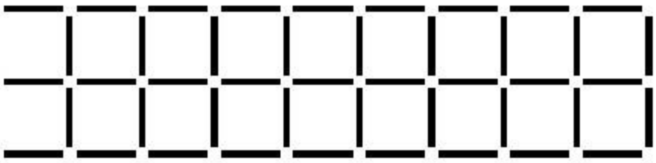
Movimiento 2:



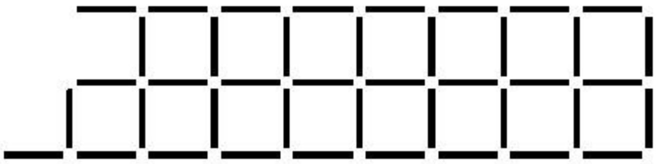
Movimiento 3:



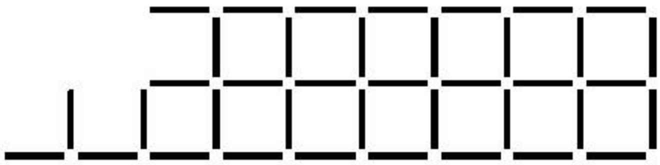
Movimiento 4:



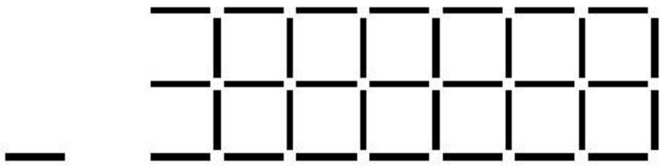
Movimiento 5:



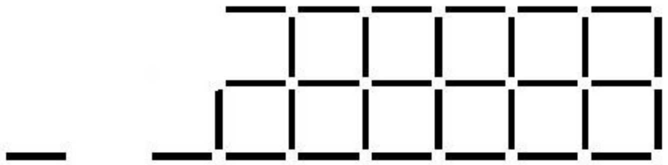
Movimiento 6:



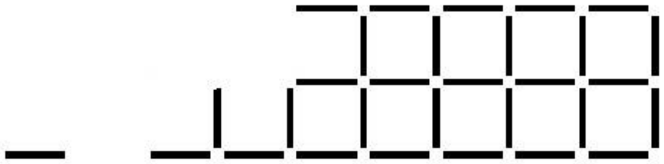
Movimiento 7:



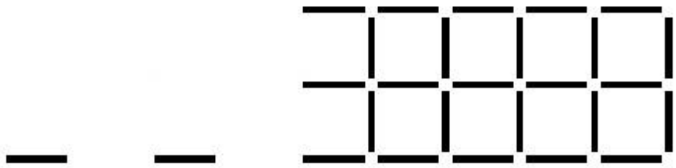
Movimiento 8:



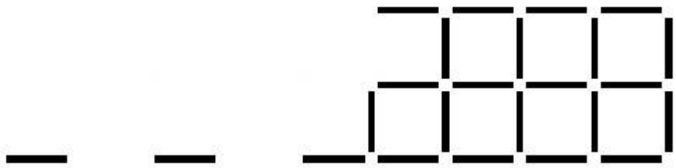
Movimiento 9:



Movimiento 10:



Movimiento 11:



Movimiento 12:

Movimiento 13:

Movimiento 14:

Movimiento 15:

Movimiento 16:

Movimiento 17:

RESPUESTA: La mayor cantidad de movimientos seguidos que se pueden realizar es 17.

9) Sean a; b; c; d números enteros positivos tales que a > b > c > d y además:

$$\text{mcd}(a;\, b) + \text{mcd}(a;\, c) + \text{mcd}(a;\, d) = 105.$$

Halla el menor valor posible de a.
Aclaración: mcd(r; s) denota al máximo común divisor de los números enteros positivos r y s.

SOLUCION:
Descomponiendo en sus factores primos: 105 = 3x5x7
Elegimos los menores factores: 3x5 = 15
Por tanto los números estarán dados por:
a = 15A
b = 15B
c = 15C
d = 15D
Reemplazando tendríamos:

$$\text{mcd}(a;\, b) + \text{mcd}(a;\, c) + \text{mcd}(a;\, d) = 105.$$
$$\text{mcd}(15A;\, 15B) + \text{mcd}(15A;\, 15C) + \text{mcd}(15A;\, 15D) = 15\text{x}7$$
$$\text{mcd}(A;\, B) + \text{mcd}(A;\, C) + \text{mcd}(A;\, D) = 7$$

Tanteando: A = 6, B = 4, C = 3 y D = 2.

$$\text{mcd}(6;\, 4) + \text{mcd}(6;\, 3) + \text{mcd}(6;\, 2) = 7$$
$$2 \quad + \quad 3 \quad + \quad 2 \quad = \quad 7 \qquad \text{¡Cumple!}$$

Reemplazando:
a = 15(6) = 90
b = 15(4) = 60
c = 15(3) = 45
d = 15(2) = 30

RESPUESTA: El menor valor posible de “a” es 90

10) Determina el menor valor que puede tomar la expresión:

$$\frac{ab(a+b-28)}{(a-1)(b-27)}$$

Donde a y b son números reales positivos tales que a > 1 y b > 27.

SOLUCION:
Tanteando se obtiene los siguientes valores:
a = 4 y b = 36
Reemplazando:

$$\frac{ab(a+b-28)}{(a-1)(b-27)}$$

$$\frac{4 \times 36(4 + 36 - 28)}{(4 - 1)(36 - 27)}$$

$$\frac{4 \times 36(12)}{(3)(9)}$$

$$4 \times 4 \times 4$$

$$64$$

RESPUESTA: El menor valor que puede tomar dicha expresión es 64.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN