XIII Olimpiada Nacional Escolar de Matemática (ONEM 2016)
Segunda Fase - Nivel 1 – Solucionario.

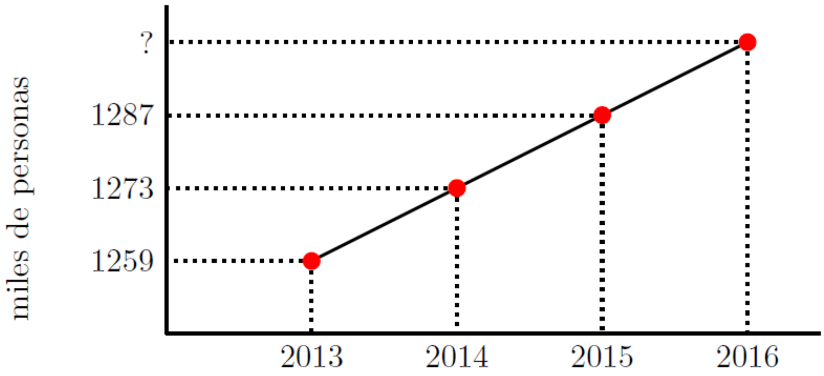
1) Un documental consta de 16 episodios: Los 4 primeros tienen 1 hora de duración y los 12 siguientes, 40 minutos de duración. Exactamente en la mitad del documental hubo un cambio de locutor. ¿En cuántos episodios participó el nuevo locutor?

SOLUCION:
Planteando:
16 episodios = 4(1 hora) + 12(40 min)
16 episodios = 4(60 min) + 12(40 min)
16 episodios = 240 min + 480 min
16 episodios = 720 min

Mitad del documental = (720 min)/2 = 360 min = 4(60 min) + 3(40min)
Número de episodios que no participó el nuevo locutor = 4 + 3 = 7
Número de episodios que participó el nuevo locutor = 16 – 7 = 9

RESPUESTA: El nuevo locutor participó en 9 episodios.

2) En el siguiente gráfico se muestra la estimación oficial de la población del departamento de Arequipa, en miles de personas, al 30 de setiembre de cada año



¿Cuál es la población estimada para el año 2016, en miles de personas?

SOLUCION:
Planteando:
Ya que los años son consecutivos, analicemos la cantidad de personas:
1273 – 1259 = 14
1287 – 1273 = 14
Como la diferencia es constante, se concluye que es una progresión aritmética de razón 14.
Por tanto: Año 2016 = 1287 + 14 = 1301

RESPUESTA: La población estimada para el año 2016, en miles de personas será 1301.

3) Hay algunas canicas en una bolsa. Con respecto al contenido de la bolsa, tres amigos dijeron lo siguiente:
- Andrés dijo: Hay menos de 10 canicas en la bolsa y todas son verdes.
- Lucas dijo: Hay 5 canicas verdes y 6 canicas blancas en la bolsa.
- Raúl dijo: Hay 7 canicas en la bolsa y todas son verdes.

Se sabe que uno de ellos mintió y los otros dos dijeron la verdad. ¿Cuántas canicas hay en la bolsa?

SOLUCION:

Probemos todas las posibilidades:

	1ra Posibilidad	2da Posibilidad	3ra Posibilidad
Andrés	Mintió	Dijo la verdad	Dijo la verdad
Lucas	Dijo la verdad	Mintió	Dijo la verdad
Raúl	Dijo la verdad	Dijo la verdad	Mintió
Conclusión	Es incorrecto porque Lucas y Raúl se estarían contradiciendo.	Es correcto porque Andrés y Raúl no se contradicen. (7 canicas verdes < 10 canicas verdes)	Es incorrecto porque Andrés y Lucas se estarían contradiciendo.

Por tanto el quién mintió es Lucas y los otros dos dijeron la verdad.

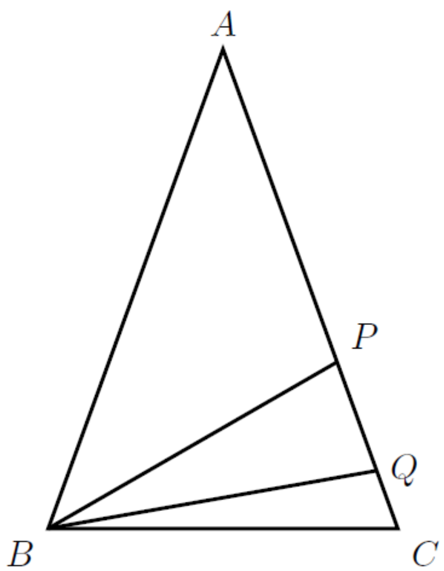
RESPUESTA: En la bolsa hay 7 canicas verdes.

4) ¿Cuál es el menor número entero positivo tal que el producto de sus dígitos es 2016?

SOLUCION:
Sea el número: “x”
Producto de cifras de “x” = 2016
Descomponiendo polinómicamente el número 2016:
$2016 = 2^5 x 3^2 x 7$
2016 = 2x2x2x2x2x3x3x7
2016 = 2x2 x7x2x2x2x3x3 ordenando de manera conveniente
2016 = 4x7x8x9
Por tanto: x = 4789.

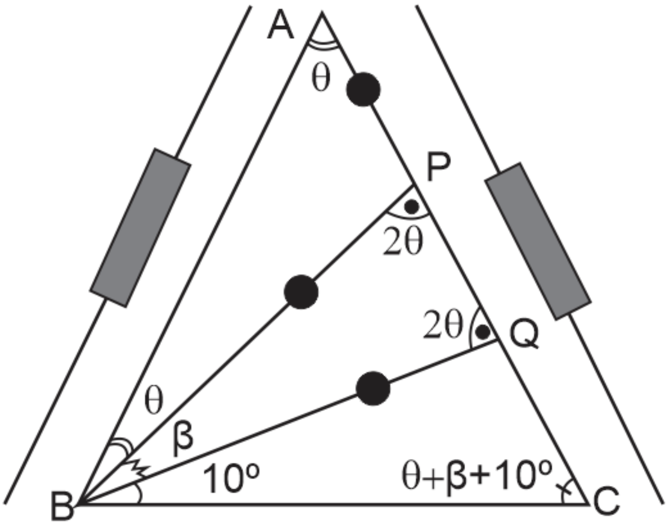
RESPUESTA: 4789 es el menor número entero positivo tal que el producto de sus dígitos es 2016.

5) En la figura se cumple que AB = AC y PA = PB = QB. Si el ángulo ∠QBC mide 10º, calcule la medida del ángulo ∠BAC.



SOLUCION:

Graficando:



Asignamos algunas variables:
m∠PBQ = β, m∠ABP = θ. Y como el ΔABP es isósceles (PA=PB), entonces: m∠PAB = θ.
En el ΔPAB, la suma de dos ángulos internos es igual al ángulo exterior del tercer vértice, por tanto: m∠BPQ = 2θ. Y como el ΔPBQ es isósceles (PB=BQ), entonces: m∠PQB = 2θ.
Además el ΔABC es isósceles (BA=AC), entonces: m∠ACB = θ+β+10º.
En el ΔABC se cumple que la suma de sus ángulos interiores es igual a 180º.

$2(\theta+\beta+10^\circ) + \theta = 180^\circ$

$2\theta+2\beta+20^\circ + \theta = 180^\circ$

$3\theta+2\beta=160^\circ$ …………..(1)

En el ΔPBQ se cumple que la suma de sus ángulos interiores es igual a 180º.

$2\theta+2\theta+\beta = 180^\circ$

$4\theta+\beta = 180^\circ$ …………..(2)

Planteando el sistema de dos ecuaciones con dos variables (1) Y (2):

$$\begin{cases} 3\theta + 2\beta = 160^\circ \\ 4\theta + \beta = 180^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\theta + 2\beta = 160^\circ \\ -8\theta - 2\beta = -360^\circ \end{cases}$$ (Resolviendo por el método de reducción)
Multiplicando por: (–2)

Sumando ambos miembros:

$$\begin{cases} 3\theta + 2\beta = 160^\circ \\ -8\theta - 2\beta = -360^\circ \end{cases}$$

$$3\theta - 8\theta = 160^\circ - 360^\circ$$

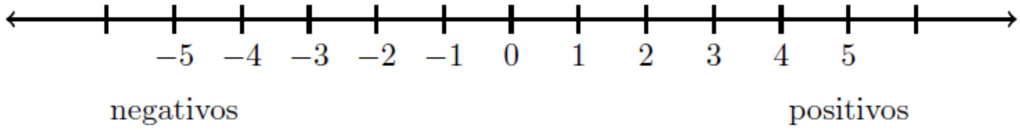
$$-5\theta = -200^\circ$$

$$\theta = (-200^\circ)/(-5^\circ) = 40^\circ$$

m∠BAC = θ = 40º .

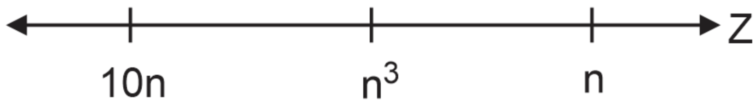
RESPUESTA: La m∠BAC = 40º.

6) Roberto escogió un número entero n. Luego, en la recta numérica ubicó los puntos correspondientes a los números 10n, n^3 y n. Resultó que los puntos quedaron en ese mismo orden, es decir, 10n quedó a la izquierda de n^3 y éste quedó a la izquierda de n.



¿Para cuántos valores de n ocurre esta situación?

SOLUCION:
Ubicando los puntos en la recta numérica:



$n \in Z$
Tabulando se tiene:

Si: n = x ⇒	10n,	n^3,	n	
Si: n = –5 ⇒	–50	–125	–5	¡No cumple!
Si: n = –4 ⇒	–40	–64	–4	¡No cumple!
Si: n = –3 ⇒	–30	–27	–3	¡Cumple!
Si: n = –2 ⇒	–20	–8	–2	¡Cumple!
Si: n = –1 ⇒	–10	–1	–1	¡No cumple!
Si: n = 0 ⇒	0	0	0	¡No cumple!
Si: n = 1 ⇒	10	1	1	¡No cumple!
Si: n = 2 ⇒	20	8	2	¡No cumple!
Si: n = 3 ⇒	30	27	3	¡No cumple!

RESPUESTA: Para 2 valores de "n" ocurre esta situación.

7) En algunas casillas de un tablero de 3x3 están escritos los siguientes números:

1	8	
		10
4		

Queremos escribir un número entero positivo en cada una de las casillas vacías de tal modo que se cumplan las siguientes condiciones:

- Los nueve números del tablero deben ser distintos entre sí.
- La suma de los cuatro números en cada cuadrado de 2x2 es siempre la misma.

Determine el menor valor que puede tomar la suma de los nueve números del tablero.

SOLUCION:
Planteando y asignando variables:

1	8	a
b	c	10
4	d	e

$1 + 8 + b + c = S$ .....(1)
$b + c + d + 4 = S$ .....(2)
$a + 8 + 10 + c = S$ .....(3)
$c + d + e + 10 = S$ .....(4)

(1) = (2)
$1 + 8 + b + c = b + c + d + 4$
$9 = d + 4$
$5 = d$

(3) = (4)
a + 8 + 10 + c = c + d + e + 10
a + 8 = d + e
a + 8 = 5 + e
a + 3 = e

(2) = (4)
b + c + d + 4 = c + d + e + 10
b + 4 = e + 10
b = e + 6

Ahora vamos a tantear, teniendo en cuenta los mínimos valores posibles y que sean diferentes entre sí:
Si: e = 6

Reemplazando “e” se tiene:
a + 3 = 6
a = 3

b = e + 6
b = 6 + 6
b = 12

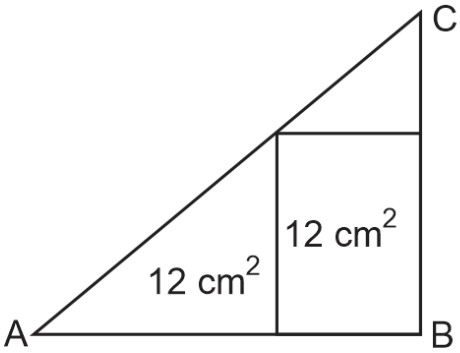
Reemplazando en la tabla se tiene:

1	8	3
12	c	10
4	5	6

Como nos piden los mínimos valores posibles y diferentes entre sí, por tanto c = 2
Suma de todos los números = 1 + 8 + 3 + 12 + 2 + 10 + 4 + 5 + 6 = 51.

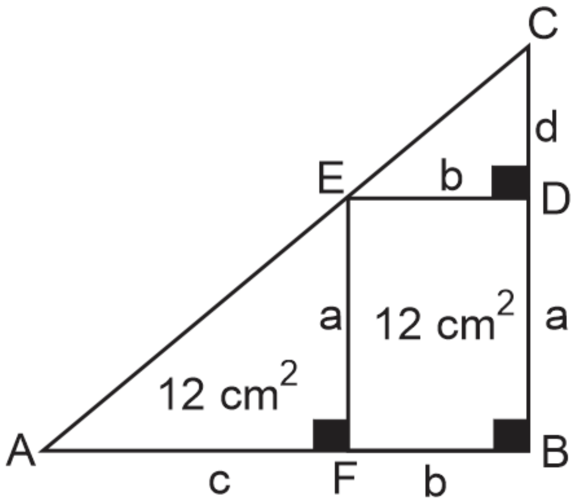
RESPUESTA: El menor valor que puede tomar la suma de los 9 números del tablero es 51.

8) El triángulo rectángulo ABC ha sido dividido en un rectángulo y dos triángulos. El rectángulo y un triángulo tienen área 12 cm^2, ¿Cuál es el área del otro triángulo, en cm^2?



SOLUCION:

Graficando:



Asignando variables:
FE = DB = a
ED = FB = b
AF = c
CD = d

$Area\ \Delta DEC = \dfrac{bd}{2}$

En el rectángulo BDEF, el área está dado por: $a \times b = 12 \ldots (1)$
En el ΔAEF, el área está dado por:

$$\frac{a \times c}{2} = 12$$

$$a \times c = 24 \ldots (2)$$

Dividiendo la ecuación (1) ÷ (2)

$$\frac{a \times b}{a \times c} = \frac{12}{24}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{1}{2}$$

$$2b = c$$

También se cumple que:

Área ΔABC = Área ΔAEF + Área □BDEF + Área ΔDEC

$$\frac{(b+c)(a+d)}{2} = 12 + 12 + \frac{b \times d}{2}$$

$$\frac{(b+2b)(a+d)}{2} = 24 + \frac{b \times d}{2}$$ Reemplazando: c = 2b

$$\frac{3b(a+d)}{2} = 24 + \frac{b \times d}{2}$$

$$\frac{3ab + 3bd}{2} = 24 + \frac{b \times d}{2}$$

$$\frac{3(12) + 3bd}{2} = 24 + \frac{b \times d}{2}$$ Reemplazando: ab = 12

$$36 + 3bd = 48 + bd \qquad \text{Multiplicando por (2)}$$
$$3bd - bd = 48 - 36$$
$$2bd = 12$$
$$bd = 6$$
$$\frac{bd}{2} = \frac{6}{2}$$
$$\frac{bd}{2} = 3$$
$$Area\ \Delta DEC = 3$$

RESPUESTA: El área del ΔDEC es 3 cm^2.

9) Sean a y b dos números enteros positivos tales que a > b y el mínimo común múltiplo de a y b es 200. ¿Cuál es el menor valor que puede tomar la diferencia a – b?

SOLUCION:
Planteando:
{a;b} ⊂ Z, a > b
MCM(a; b) = 200
Sean:
a = αk
b = βk
Donde α y β son números primos entres sí (PESI)
MCM(a; b) = 200
MCM(αk; βk) = 200
kαβ = 200
kαβ = 2x2x2x5x5 Descomponiendo en sus factores primos
kαβ = (5x2)x5x(2x2) Ordenando de manera adecuada
kαβ = 10x5x4 5 y 4 son números PESI cuya diferencia es la menor posible
Por tanto: k = 10, α = 5, β = 4.
Reemplazando:
a = αk ⇒ a = 5(10) = 50
b = βk ⇒ b = 4(10) = 40
Por tanto: a – b = 50 – 40 = 10

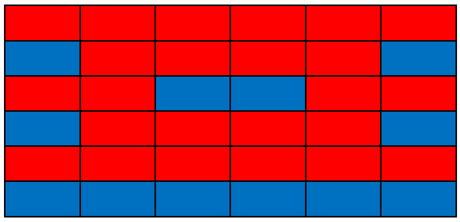
RESPUESTA: El menor valor que puede tomar la diferencia: “a – b” es 10.

10) En un tablero de 6x6 cada casilla se pinta de rojo o azul de tal manera que cualquier casilla tiene un número impar de casillas vecinas rojas. ¿Cuántas casillas rojas puede haber como máximo?

Aclaración: Considere que dos casillas son vecinas si comparten un lado.

SOLUCION:

Pintando de forma adecuada de tal manera que cualquier casilla tenga un número impar de casillas vecinas rojas:



Por tanto:
Casilleros azules = 12
Casilleros rojos = 24

RESPUESTA: El tablero puede tener como máximo 24 casillas rojas.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN