XIII Olimpiada Nacional Escolar de Matemática (ONEM 2016)
Primera Fase - Nivel 3 – Solucionario.

1) Andrea rindió cuatro exámenes en el curso de matemática y obtuvo la misma nota en los tres primeros exámenes. Se sabe que la nota del cuarto examen fue 17 y el promedio de sus cuatro notas fue 14, ¿Cuál fue la nota el segundo examen?

A) 16 B) 15 C) 11 D) 14 E) 13

SOLUCION:
Planteando:
Sea "X" la nota que obtuvo en los tres primeros exámenes.

$$\frac{x+x+x+17}{4}=14$$

$$\frac{3x+17}{4}=14$$

$$3x=56-17$$
$$x=\frac{39}{3}=13$$

RESPUESTA: La nota del segundo examen fue 13. **CLAVE E**.

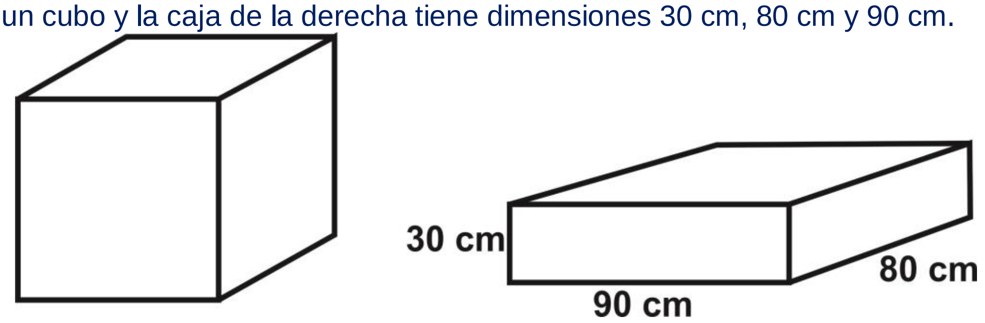
2) En una manifestación hay un grupo numeroso de personas que está ocupando una calle que tiene 200 metros de largo y 9 metros de ancho. Determine, aproximadamente, cuántas personas hay en la manifestación si se sabe que en un metro cuadrado hay 4 personas, en promedio.

A) 36000 B) 10800 C) 7200 D) 108000 E) 72000

SOLUCION:
Planteando:
Área de la calle = (200 m)(9 m) = 18 000 m^2 (La calle es de forma rectangular)
Número de personas = 1800(4) = 7200

RESPUESTA: En la manifestación hay 7200 personas. **CLAVE C**.

3) En la figura se muestran dos cajas que tienen igual volumen. La caja de la izquierda tiene forma de un cubo y la caja de la derecha tiene dimensiones 30 cm, 80 cm y 90 cm.



Determine el área de la base de la caja de la izquierda.

A) 3600 cm^2 B) 4000 cm^2 C) 4800 cm^2 D) 2400 cm^2 E) 4500 cm^2

SOLUCION:

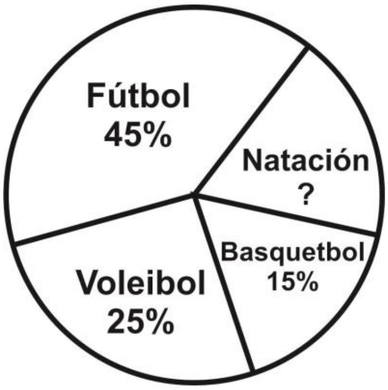
Plateando:
Volumen de la Caja 1 = L^3 (Cubo)
Volumen de la Caja 2 = (30 cm)(90 cm)(80 cm) (ortoedro)

$$\text{Volumen(Caja 1)} = \text{Volumen(Caja 2)}$$
$$L^3 = 30 \times 80 \times 90$$
$$L^3 = 27 \times 8 \times 1000$$
$$\mathrm{L} = \sqrt[3]{27 \times 8 \times 1000}$$
$$\mathrm{L} = 3 \times 2 \times 10 = 60$$

Área de la base del cubo = 60x60 = 3600 cm^2

RESPUESTA: El área de la base de la caja de la izquierda es de 3600 cm^2. **CLAVE A**.

4) A un grupo de personas se le preguntó por su deporte favorito, con los resultados se elaboró el siguiente gráfico circular:



Si 12 personas dijeron que su deporte favorito es natación, determine cuál de las siguientes proposiciones es falsa:

A) 12 personas dijeron que su deporte favorito es basquetbol.
B) Más de 30 personas dijeron que su deporte favorito es fútbol.
C) Más de 20 personas dijeron que su deporte favorito es voleibol.
D) Más de la mitad de las personas prefieren fútbol o voleibol.
E) Menos de la quinta parte del total dijo que su deporte favorito es natación.

SOLUCION:
Planteando: Sea "X" la cantidad total de personas.
45% + 25% + 15% + Natación = 100%
Natación = 100% - 85% = 15%
Natación = 12 personas

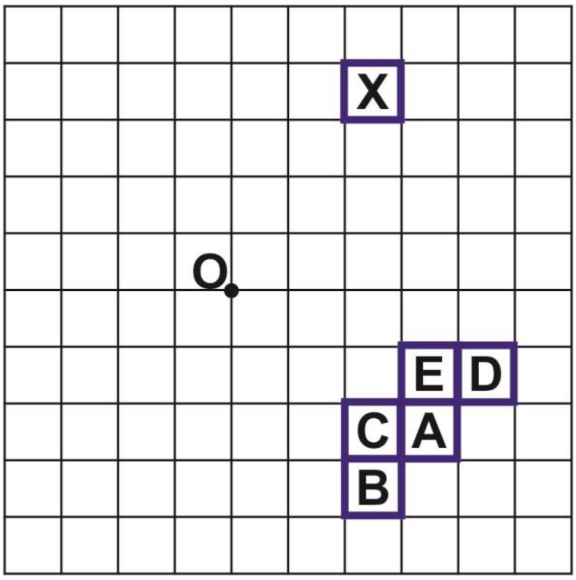
$$15\%X = 12$$
$$\frac{15X}{100} = 12$$
$$X = \frac{1200}{15}$$
$$X = 80$$

Basquetbol = 12 personas (Representa el 15%)
Fútbol:
$$45\%X = \frac{45}{100} \times 80 = 36\ Personas$$
Voleibol:
$$25\%X = \frac{25}{100} \times 80 = 20\ Personas$$
Analizando cada alternativa:
A) Verdadero, porque Basquetbol = 12 personas.

B) Verdadero, porque Fútbol: 36 personas > 30 personas.
C) Falso, porque voleibol: 20 personas y no es más que 20 personas.
D) Verdadero, porque:
(Fútbol + Voleibol) > Mitad de las personas
(36 + 20) > 80/2
56 > 40
E) Verdadero, porque: 80/5 = 16 > 12.

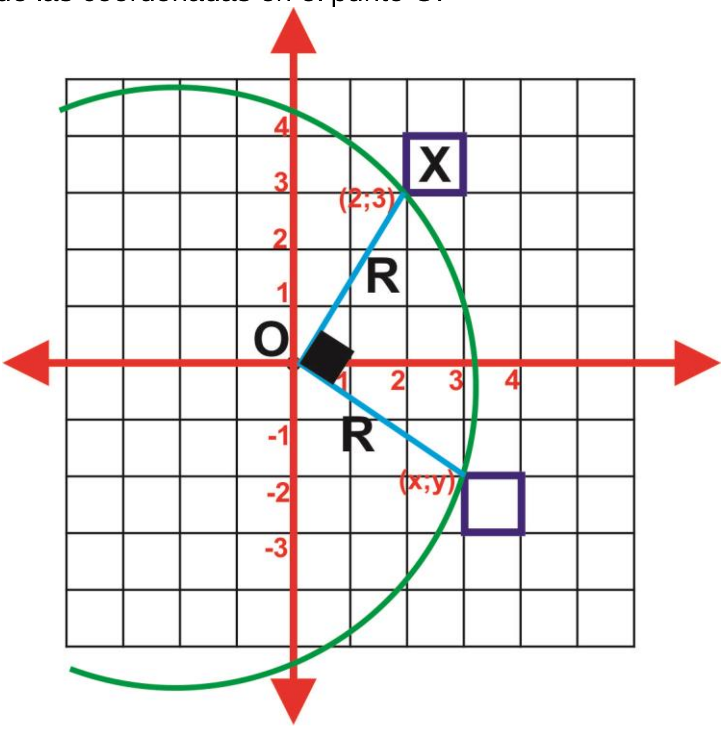
RESPUESTA: La proposición C es falsa. **CLAVE C**.

5) ¿Qué cuadrado obtenemos al rotar el cuadrado X, 90° en sentido horario, con centro en el punto O?



A) A B) B C) C D) D E) E

SOLUCION:
Trazando el origen de las coordenadas en el punto O.



Hallando las coordenadas del cuadrado originado por el cuadrado "X" habiendo rotado 90° en sentido horario:
Si son perpendiculares el producto de sus pendientes es igual a – 1.

$$\left(\frac{3-0}{2-0}\right)\left(\frac{y-0}{x-0}\right)=-1$$
$$\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{y}{x}\right)=-1$$
$$\frac{y}{x}=\frac{-2}{3}$$
$$\frac{y}{x}=\frac{-2k}{3k}$$

Los radios son iguales, por tanto se cumple:

$$\sqrt{(3-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{(-2k-0)^2+(3k-0)^2}$$
$$3^2+2^2=(-2k)^2+(3k)^2$$
$$9+4=4k^2+9k^2$$
$$13=13k^2$$
$$k=1$$

Por tanto: x = 3, y = – 2, cuyo par ordenado hallado es (3;2) y corresponde al cuadrado "A".

RESPUESTA: Se obtiene el cuadrado "A" al rotar 90° en sentido horario el cuadrado "X" con centro en el punto "O". **CLAVE C**.

6) La suma de ocho números naturales consecutivos es 92. Sea P el producto de esos ocho números. ¿Cuál es el menor entero positivo que no es divisor de P?

A) 9 B) 13 C) 23 D) 17 E) 18

SOLUCION:
Planteando la ecuación:

n + (n + 1) + (n + 2) +(n + 3) + (n + 4) + (n + 5) + (n + 6) + (n + 7) = 92
8n + 28 = 92
8n = 92 – 28
n = 64/8 = 8

Producto de los ocho números: P
P = 8x9x10x11x12x13x14x15
Analizando cada alternativa:
A) 9 sí es divisor de P.
B) 13 sí es divisor de P.
C) 23 no es divisor de P, pero no es el menor.
D) 17 no es divisor de P y si es el menor.
E) 18 sí es divisor de P.

RESPUESTA: 17 es el menor entero positivo que no es divisor de P. **CLAVE D**.

7) Un estudio determinó que si la entrada del cine cuesta x soles, el número de asistentes será 960 – 60x, donde x es un entero positivo entre 3 y 15, inclusive. ¿Para qué valor de x la cantidad de dinero que recaude el cine por la venta de las entradas será máxima?

A) 3 B) 6 C) 8 D) 9 E) 15

SOLUCION:
Planteando:
Precio de la entrada: "X" soles, donde: 3 < X < 15
Número de asistentes: 960 – 60X
Recaudación: R(X) = X(960 – 60X)

Tabulando:
R(4) = 4(960 – 60x4) = 4(960 – 240) = 4(720) = 2880
R(5) = 5(960 – 60x5) = 5(960 – 300) = 5(660) = 3300
R(6) = 6(960 – 60x6) = 6(960 – 360) = 6(600) = 3600
R(7) = 7(960 – 60x7) = 7(960 – 420) = 7(540) = 3780
R(8) = 8(960 – 60x8) = 8(960 – 480) = 8(480) = 3840 (Máximo)
R(9) = 9(960 – 60x9) = 9(960 – 540) = 9(420) = 3780
R(10) = 10(960 – 60x10) = 10(960 – 600) = 10(360) = 3600
R(11) = 11(960 – 60x11) = 11(960 – 660) = 11(300) = 3300
R(12) = 12(960 – 60x12) = 12(960 – 720) = 12(240) = 2880
R(13) = 13(960 – 60x13) = 13(960 – 780) = 13(180) = 2340
R(14) = 14(960 – 60x14) = 14(960 – 840) = 14(120) = 1680

RESPUESTA: Si: X = 8, la recaudación es máxima. **CLAVE C**.

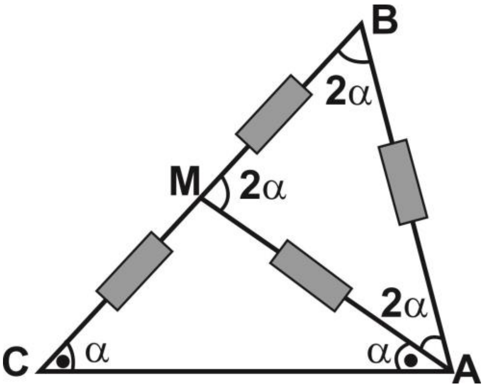
8) Sea M el punto medio del lado BC de un triángulo ABC, si se cumple que:

$$m\angle BAM = 2m\angle MAC = 2m\angle MCA,$$

Halla la medida del ángulo $m\angle ABC$.

A) 30° B) 90° C) 45° D) 100° E) 60°

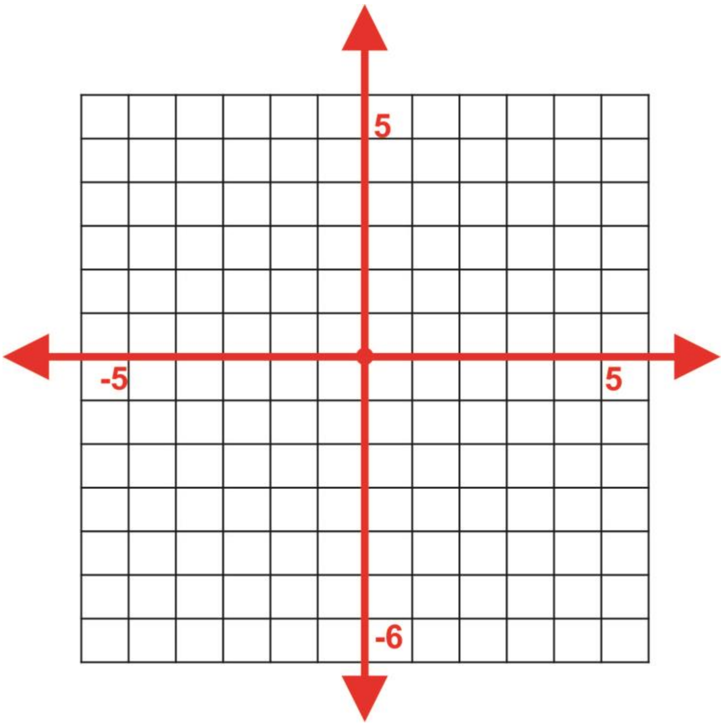
SOLUCION:
Planteando:
Si: $m\angle BAM = 2m\angle MAC = 2m\angle MCA$, considerando: $m\angle MCA = \alpha$. Se cumple:
$m\angle MAC = \alpha$ y $m\angle BAM = 2\alpha$. Por tanto ΔCAM es isósceles (CM = MA).
Graficando:



En el ΔCAM la suma de dos ángulos internos es igual al ángulo exterior del tercer vértice, por tanto: $m\angle AMB = 2\alpha$. También $m\angle MBA = 2\alpha$. Por tanto el ΔBAM es equilátero y se cumple:
$2\alpha = 60° \rightarrow \alpha = 30°$
Nos piden hallar: $m\angle ABC = 2\alpha = 2(30°) = 60°$

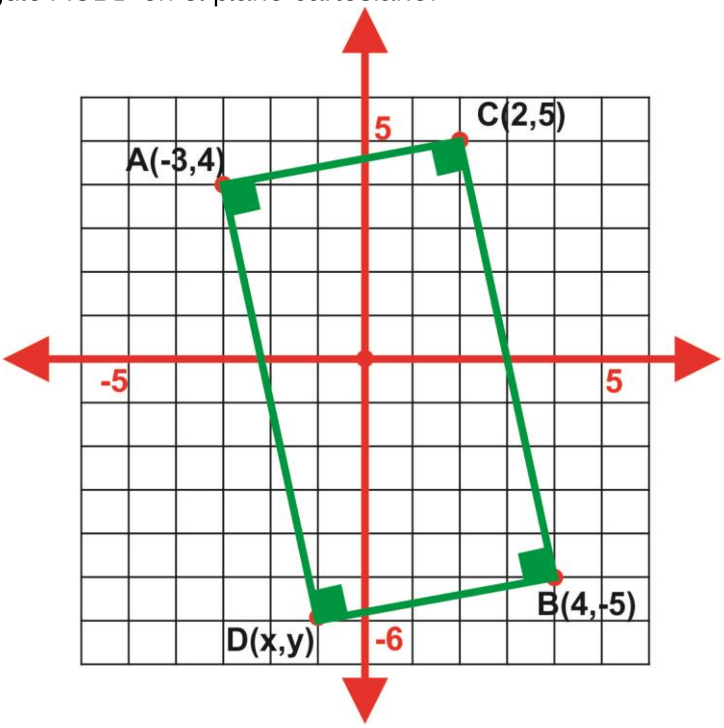
RESPUESTA: La medida del $\angle ABC$ es 60°. **CLAVE E**.

9) Un alumno marcó en el plano cartesiano los siguientes tres puntos: (–3; 4), (4; –5) y (2; 5). ¿Cuál es el cuarto punto que debe marcar el alumno para que los cuatro puntos sean los vértices de un rectángulo?



A) (–3; –4) B) (0; –6) C) (–2; –5) D) (0; –5) E) (–1; –6)

SOLUCION:
Ubicando el rectángulo ACBD en el plano cartesiano:



Los lados opuestos de un rectángulo son paralelos, por tanto tienen la misma pendiente:

$$mDA = MBC$$

$$\frac{y-4}{x+3} = \frac{-5-5}{4-2}$$

$$\frac{y-4}{x+3} = \frac{-10}{2}$$

$$\frac{y-4}{x+3} = -5$$

$$y - 4 = -5x - 15$$
$$y + 5x = -11 \;\; \dots\dots (\alpha)$$

También se cumple:

$$mAC = MDB$$
$$\frac{4-5}{-3-2} = \frac{y+5}{x-4}$$
$$\frac{-1}{-5} = \frac{y+5}{x-4}$$
$$x - 4 = 5y + 25$$
$$x = 5y + 29 \;\; \dots\dots (\beta)$$

Reemplazando (β) en (α):

$$y + 5x = -11$$
$$y + 5(5y + 29) = -11$$
$$y + 25y + 145 = -11$$
$$26y = -156$$
$$y = -6$$

Reemplazando "y" en (α):

$$y + 5x = -11$$
$$-6 + 5x = -11$$
$$5x = -5$$
$$x = -1$$

Por tanto el vértice D = (–1; –6)

RESPUESTA: El cuarto punto es D = (–1; –6). **CLAVE E**.

10) Se muestra la tabla de frecuencias de las notas obtenidas por los alumnos de un salón de clases:

Nota	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
[9;11]		10%
[12;14]	10	
[15;17]		50%
[18;20]	6	

¿Cuántos alumnos hay en el salón de clases?

A) 60 B) 40 C) 35 D) 48 E) 65

SOLUCION:

Completando la tabla y asignado valores:

Nota	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
[9;11]	x	x	10%	10%
[12;14]	10	10 + x		
[15;17]	y	10 + x + y	50%	
[18;20]	6	16 + x + y		100%

Trabajando con la frecuencia relativa:

$$\frac{x}{16 + x + y} = 10\%$$

$$\frac{x}{16+x+y}=\frac{10}{100}$$
$$10x=16+x+y$$
$$9x=16+y\ \ldots\ldots(\alpha)$$

También:

$$\frac{y}{16+x+y}=50\%$$
$$\frac{y}{16+x+y}=\frac{50}{100}$$
$$2y=16+x+y$$
$$y=16+x\ \ldots\ldots(\beta)$$

Reemplazando (β) en (α)

$$9x=16+y$$
$$9x=16+16+x$$
$$8x=32$$
$$x=4$$

Reemplazando "x" en (α)

$$9x=16+y$$
$$9(4)=16+y$$
$$36-16=y$$
$$20=y$$

Hallando el total: 16 + x + y = 16 + 4 + 20 = 40

RESPUESTA: En el salón de clases hay 40 alumnos. **CLAVE B**.

11) ¿Cuál de las siguientes funciones trigonométricas cumple que su máximo valor es igual al doble de su mínimo valor?

A) r(x) = 2sen x
B) s(x) = 3cos x
C) t(x) = sen x + 2
D) u(x) = 3sen x – 2
E) v(x) = sen x + 3

SOLUCION:
Dada las siguientes expresiones: Senx y Cosx, el máximo valor es 1 y el mínimo valor es – 1.
Analizando cada alternativa:
A) r(x) = 2senx
- Máximo: 2(1) = 2
- Mínimo: 2(–1) = –2 ¡No cumple!

B) s(x) = 3cosx
- Máximo: 3(1) = 3
- Mínimo: 3(–1) = –3 ¡No cumple!

C) t(x) = senx + 2
- Máximo: 1 + 2 = 3
- Mínimo: –1+2 = 1 ¡No cumple!

D) u(x) = 3senx – 2
- Máximo: 3(1) – 2 = 1
- Mínimo: 3(–1) – 2 = –5 ¡No cumple!

E) v(x) = senx + 3
- Máximo: 1 + 3 = 4
- Mínimo: –1 + 3 = 2 ¡Sí cumple!

RESPUESTA: En la función v(x) = Senx + 3, se cumple que su máximo valor es igual al doble de su mínimo valor. **CLAVE E**.

12) Un biólogo observó una muestra durante varios días, y observó que la cantidad de bacterias que hay en esa muestra, conforme pasan los días, crece según una progresión geométrica. El día 3 había 3×10^8 bacterias y el día 5 había $2,7\times10^{13}$ bacterias. ¿Cuántas bacterias había el día 4?

A) $2,85\times10^9$ B) 9×10^{10} C) 9×10^{11} D) 6×10^{11} E) $2,8\times10^{11}$

SOLUCION:

Planteando:

	Día 3		Día 4		Día 5
P.G.	3×10^8	$\xrightarrow{\times q}$	X	$\xrightarrow{\times q}$	$2,7\times10^{13}$

P.G.: Progresión Geométrica

q = razón geométrica

Se cumple:

$X = 3\times10^8\times q$

También se cumple por ser P.G.:

$2,7\times10^{13} = 3\times10^8\times q^2$

$27\times10^{13} = 3\times10^9\times q^2$ (multiplicando por 10)

$9\times10^4 = q^2$

$q = \sqrt{9\times10^4}$

$q = 3\times10^2$

Hallando "X":

$X = 3\times10^8\times3\times10^2 = 9\times10^{10}$

RESPUESTA: El día 4 había 9×10^{10} bacterias. **CLAVE B**.

13) Un litro de agua pesa 1 kilogramo y un litro de leche pesa 1,05 kilogramos. Se mezcló cierta cantidad de agua con cierta cantidad de leche y se obtuvo una mezcla de 20 litros que pesa n kilogramos. ¿Cuántos litros de agua hay en la mezcla?

A) 21(20–n) B) 20(20–n) C) $400–n^2$ D) 20(21–n) E) 21(19–n)

SOLUCION:

Planteando:

1 litro de agua pesa 1 kg

1 litro de leche pesa 1,05 kg

Sea:

"X": Cantidad de litros de agua.

"Y": Cantidad de litros de leche.

Planteando el sistema de dos ecuaciones con dos variables:

$$\begin{cases} 1X + 1,05Y = n \\ X + Y = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X + 1,05Y = n \\ -1,05X - 1,05Y = 20(-1,05) \end{cases}$$

(Resolviendo por el método de reducción)

Multiplicando por: (–1,05)

Sumando ambos miembros:

$$\begin{cases} X + 1,05Y = n \\ -1,05X - 1,05Y = -21 \end{cases}$$

$$X - 1,05X = n - 21$$

$$-0,05X = n - 21$$

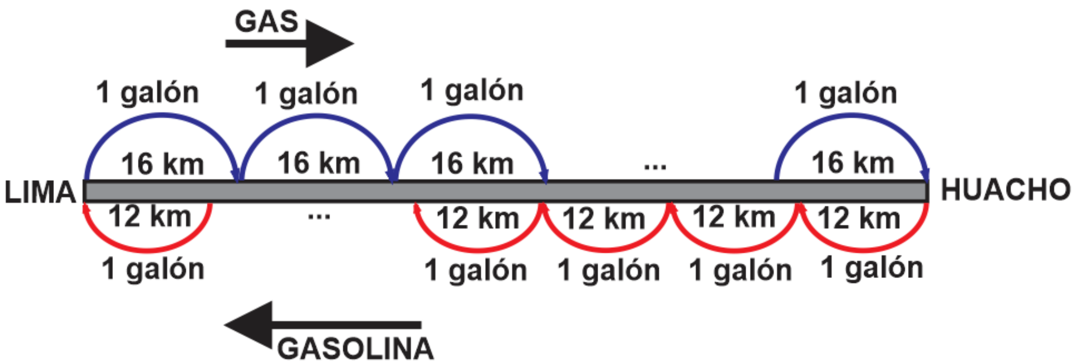
–5X = 100(n – 21) Multiplicando por: (100)
X = 20(21 – n) Dividiendo entre: (–5)

RESPUESTA: En la mezcla hay: 20(21–n) litros de agua. **CLAVE D**.

14) Roberto hace un viaje de ida y vuelta entre Lima y Huacho en su carro, que funciona con gas o gasolina. En la ida, usando solamente gas, el carro recorre 16 km por galón y en la vuelta, usando solamente gasolina, recorre 12 km por galón. En total, Roberto utilizó 21 galones de combustible en este viaje. ¿Cuál es la distancia, en km, entre Lima y Huacho?

A) 120 km B) 144 km C) 192 km D) 132 km E) 108 km

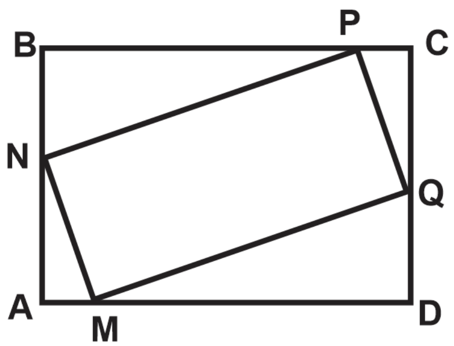
SOLUCION:
Sea:
“X” la cantidad de gas.
“Y” la cantidad de gasolina.



Planteando las ecuaciones:
X + Y = 21 …(α)
16X = 12Y → 4X = 3Y …(β) (Las distancias son iguales)
Multiplicando por 4 a la ecuación (α)
X + Y = 21
4X + 4Y = 84
3Y + 4Y = 84 Reemplazando (β)
7Y = 84
Y = 12
Distancia de Lima a Huacho = 12Y = 12(12) = 144 km

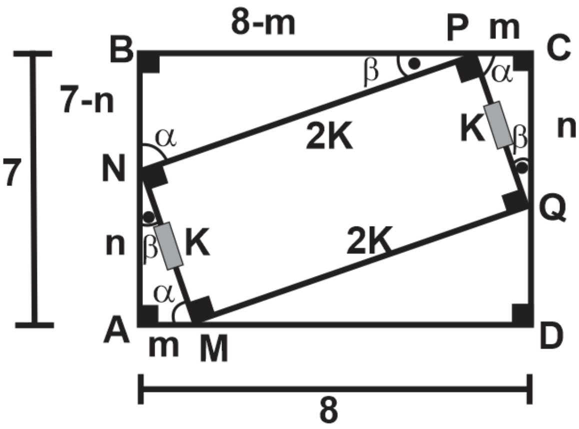
RESPUESTA: La distancia entre Lima y Huacho es de 144 km. **CLAVE B**.

15) El rectángulo MNPQ está inscrito en el rectángulo ABCD, como se muestra en la figura. Si AB = 7, BC = 8 y NP = 2MN, halle el área del rectángulo MNPQ.



A) 26 B) 36 C) 28 D) 32 E) 24

SOLUCION:
Plateando:
Si: MN = K → NP = 2K.
Sea también: m∠NMA = α, por tanto se cumple: m∠NMA = m∠BNP = m∠CPQ = α.
Sea también: m∠ANM = β, por tanto se cumple: m∠BPN = m∠BPN = m∠PQC = β.



Asignando algunas variables:
AM = m y NA = n
Como MNPQ es un rectángulo, se cumple NM = PQ = K (Lados opuestos son congruentes)
Si: AB = 7 y BC = 8, entonces se cumple: BN = 7 – n. BP =8 – m.
Se aprecia que: ΔAMN ~ ΔBNP, entonces se cumple:

$$\frac{2K}{K} = \frac{7-n}{m}$$
$$2m = 7 - n$$
$$2m + n = 7 \text{ ... } (\theta)$$

También se cumple:

$$\frac{2K}{K} = \frac{8-m}{n}$$
$$2n = 8 - m$$
$$2n + m = 8 \text{ ... } (\gamma)$$

Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones: (θ) y (γ)

$$\begin{cases} 2m + n = 7 \\ m + 2n = 8 \end{cases}$$ (Resolviendo por el método de reducción)

$$\begin{cases} -4m - 2n = -14 \\ m + 2n = 8 \end{cases}$$ Multiplicando por: (–2)

Sumando ambos miembros:

$$\begin{cases} -4m - 2n = -14 \\ m + 2n = 8 \end{cases}$$

$$-4m + m = -14 + 8$$
$$-3m = -6$$
$$m = 2 \quad \ldots(\lambda)$$

Reemplazando (λ) en (θ)
2m + n = 7
2(2) + n = 7
4 + n = 7
n = 3

Hallando “K” en el ΔAMN utilizando el Teorema de Pitágoras.

$$n^2 + m^2 = K^2$$
$$3^2 + 2^2 = K^2$$
$$9 + 4 = K^2$$
$$\sqrt{13} = K$$

El área del rectángulo MNPQ = K(2K) = $2K^2$ = $2(\sqrt{13}^2) = 2(13) = 26$

RESPUESTA: El área del rectángulo MNPQ es 26 u^2. **CLAVE A.**

16) Sean x; y; z números reales tales que:

$$x + y = z^2 - 3,$$
$$y + z = x^2 - 3,$$
$$z + x = y^2 - 3.$$

Si x ≠ y y además, x ≠ z, calcule el valor de yz.

A) –2 B) $\sqrt{2}$ C) 2 D) 1 E) 9

SOLUCION:

Planteando:

$x + y = z^2 - 3 \quad \ldots(\alpha)$
$y + z = x^2 - 3 \quad \ldots(\beta)$
$z + x = y^2 - 3 \quad \ldots(\theta)$

Escogiendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = z^2 - 3 & \ldots(\alpha) \\ y + z = x^2 - 3 & \ldots(\beta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = z^2 - 3 & \ldots(\alpha) \\ -y - z = -x^2 + 3 & \ldots(\beta) \end{cases}$$ Multiplicando por (–1)

$x - z = z^2 - x^2$
$-(z - x) = (z - x)(z + x)$
$-1 = z + x \quad \ldots(\lambda)$

Reemplazando (λ) en la ecuación (θ)

$z + x = y^2 - 3$
$-1 = y^2 - 3$
$3 - 1 = y^2$
$\sqrt{2} = y$

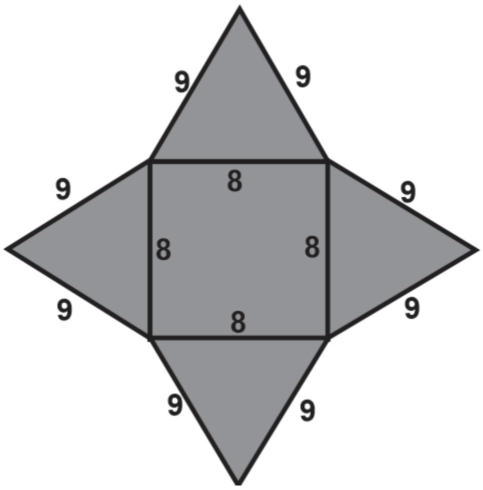
Elevando al cuadrado la ecuación (λ)

$(-1)^2 = (z + x)^2$
$1 = z^2 + 2zx + x^2$
$1 = z^2 - 3 + 3 + 2zx + x^2 - 3 + 3$ Sumando y restando 3 dos veces.
$1 = (z^2 - 3) + 2zx + (x^2 - 3) + 3 + 3$
$1 = x + y + 2zx + y + z + 6$ Reemplazando (α) y (β)
$1 = 2y + (x + z) + 6 + 2zx$
$1 = 2(\sqrt{2}) + (-1) + 6 + 2zx$ Reemplazando "y" y (λ)
$1 - 5 - 2\sqrt{2} = 2zx$
$-4 - 2\sqrt{2} = 2zx$
$-2 - \sqrt{2} = zx$
$\sqrt{2}(-\sqrt{2} - 1) = zx$ Factorizando: $(\sqrt{2})$
$z = \sqrt{2}, \quad x = -\sqrt{2} - 1$

Nos piden hallar: $yz = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$

RESPUESTA: El producto de yz es 2. **CLAVE C.**

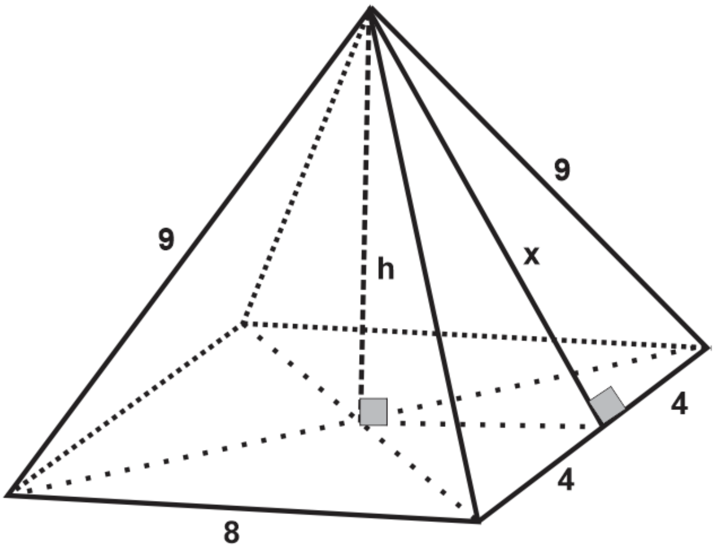
17) En la figura se muestra el desarrollo de una pirámide de base cuadrada, donde las longitudes mostradas están expresadas en cm. ¿Cuál es el volumen de la pirámide?



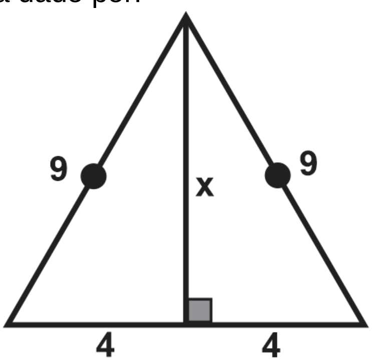
A) $\frac{448}{3}\ cm^3$ B) $128\ cm^3$ C) $\frac{64\sqrt{13}}{3}\ cm^3$ D) $\frac{64\sqrt{51}}{3}\ cm^3$ E) $132\ cm^3$

SOLUCION:

Armando la plantilla, obtendremos la siguiente pirámide de base cuadrangular:



La cara lateral de la pirámide está dado por:

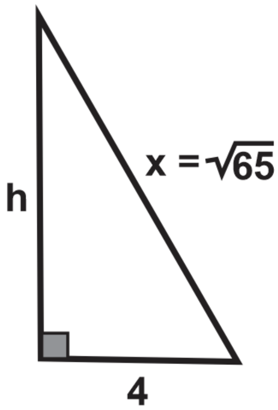


Hallando la apotema de la pirámide, utilizando el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + 4^2 = 9^2$$

$$x^2 + 16 = 81$$
$$x^2 = 81 - 16$$
$$x = \sqrt{65}$$

Triángulo formado por la altura de la pirámide, la apotema de la pirámide y apotema de la base:



Hallando la altura de la pirámide, utilizando el teorema de Pitágoras:

$$h^2 + 4^2 = \sqrt{65}^2$$
$$h^2 + 16 = 65$$
$$h^2 = 65 - 16$$
$$h = \sqrt{49} = 7$$

El volumen de la pirámide está dado por.

$$Volumen = \frac{L^2 \times h}{3}$$

Dónde: L = Arista de la base, h = altura de la pirámide.

$$Volumen = \frac{8^2 \times 7}{3} = \frac{64 \times 7}{3} = \frac{448}{3}$$

RESPUESTA: El volumen de la pirámide es 448/3 cm^3. **CLAVE A**

18) En cada casilla del siguiente tablero de 3×3 debe estar escrito un entero positivo, de tal modo que el producto de los números de cualquier fila y el producto de los números de cualquier columna es múltiplo de 30. ¿Cuál es el menor valor que puede tomar la suma de todos los números escritos en el tablero?

A) 35 B) 43 C) 36 D) 33 E) 30

SOLUCION:

Producto de los números de cualquier fila y columna es múltiplo de 30.

Descomponiendo en sus factores primos: 30 = 2×3×5.

Para que sea el menor valor que puede tomar la suma de todos los números escritos en el tablero, los números tienen que ser: 2; 3 y 5. Una de las soluciones podría ser:

5	2	3
3	5	2
2	3	5

Suma de los números en el tablero: (2+3+5)3= 30

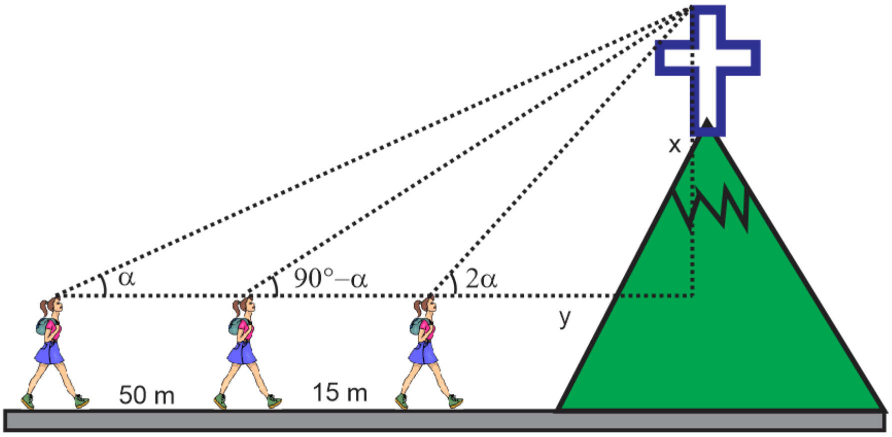
RESPUESTA: El menor valor que puede tomar la suma de todos los números escritos en el tablero es 30. **CLAVE E**.

19) Sara observa la cruz ubicada en lo alto de una montaña con un ángulo de elevación de α°. Luego de avanzar 50 metros en dirección a la montaña, ella observa la misma cruz con un ángulo de elevación de 90 – α°. Luego de avanzar 15 metros más, ella observa la cruz con un ángulo de elevación de 2α°. ¿A qué altura (en metros) está la cruz?

A) 65 B) 60 C) 72 D) 50 E) 55

SOLUCION:

Graficando de acuerdo a los datos presentados:



Sea “x” la altura hasta donde se encuentra la cruz. “y” la distancia donde se queda la persona luego de caminar 65 m hacia la montaña.

Se cumple:

$$Tan\alpha = \frac{x}{50+15+y}$$

$$Tan\alpha = \frac{x}{65+y} \ ...(\gamma)$$

También se cumple:

$$Tan(90º - \alpha) = \frac{x}{15+y}$$

$$Cot\alpha = \frac{x}{15+y}$$

$$\frac{1}{Tan\alpha} = \frac{x}{15+y}$$

$$\frac{15+y}{x} = Tan\alpha \ ...(\beta)$$

Igualando: (γ) = (β)

$$\frac{x}{65+y} = \frac{15+y}{x}$$

$$x.x = (65+y)(15+y)$$

$$x^2 = 975 + 80y + y^2 \ ...(\omega)$$

También se cumple:

$$tan2\alpha = \frac{x}{y}$$

$$\frac{2tan\alpha}{1-tan\alpha^2}=\frac{x}{y}\ ....(\theta)\qquad F\acute{o}rmula\ del\ \acute{a}ngulo\ doble$$

Reemplazando (γ) en (θ).

$$\frac{2tan\alpha}{1-tan\alpha^2}=\frac{x}{y}$$

$$\frac{2\left(\frac{15+y}{x}\right)}{1-\left(\frac{15+y}{x}\right)^2}=\frac{x}{y}$$

$$\frac{\frac{30+2y}{x}}{\frac{x^2-225-30y-y^2}{x^2}}=\frac{x}{y}$$

$$\frac{(30+2y)(x^2)}{(x^2-225-30y-y^2)(x)}=\frac{x}{y}$$

$$(30+2y)y=x^2-225-30y-y^2$$

$$30y+2y^2=x^2-225-30y-y^2$$

$$3y^2+60y+225=x^2$$

$$3y^2+60y+225=975+80y+y^2\quad Reemplazando\ (\omega)$$

$$2y^2-20y-750=0$$

$$y^2-10y-375=0$$

$$(y-25)(y+15)=0$$

$$y=25\ \ \text{ó}\ \ y=-15$$

$$y=25$$

Reemplazando “y” en (ω):

$$x^2=975+80y+y^2$$

$$x^2=975+80(25)+(25)^2$$

$$x^2=975+2000+625$$

$$x=\sqrt{3600}=60$$

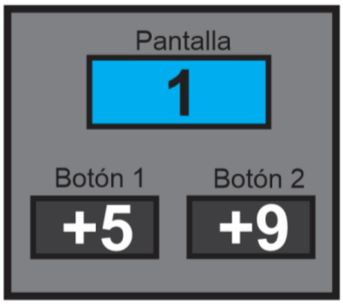
RESPUESTA: La cruz se encuentra a 60 m de altura **CLAVE B.**

20) Una calculadora extraña tiene inicialmente el número 1 en su pantalla y solo tiene 2 botones. Con uno de los botones se le suma 5 al número de la pantalla y con el otro botón se le suma 9. Algunos números se pueden obtener en la pantalla (como 10 y 11), pero hay otros que no se pueden obtener (como 2 y 8). Encuentre el mayor número que no se puede obtener en la pantalla y dé como respuesta la suma de los dígitos de dicho número.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

SOLUCION:

Graficando la calculadora:



Expresando los números dados en función de múltiplos:

$$1 = \overset{\circ}{5} + 1 = \overset{\circ}{9} + 1$$

$$5 = \overset{\circ}{5}$$

$$9 = \overset{\circ}{5} + 4 = \overset{\circ}{9}$$

- Presionando una y varias veces el mismo botón:

  $$1 + 5 = (\overset{\circ}{5} + 1) + \overset{\circ}{5} = \overset{\circ}{5} + 1 \qquad (\geq 6)$$

  Vamos a tachar todos los múltiplos de cinco más uno a partir de seis: 6, 11, 16, 21,… (Color amarillo)

  $$1 + 9 = (\overset{\circ}{9} + 1) + \overset{\circ}{9} = \overset{\circ}{9} + 1 \qquad (\geq 10)$$

  Vamos a tachar todos los múltiplos de nueve más uno a partir de diez: 10, 19, 28, 37,… (Color rojo)

- Presionando el botón nueve y luego indefinidamente el botón cinco;

  $$1 + 9 + 5 = (\overset{\circ}{5} + 1) + (\overset{\circ}{5} + 4) + \overset{\circ}{5} = \overset{\circ}{5} + 5 = \overset{\circ}{5} \quad (\geq 15)$$

  Vamos a tachar todos los múltiplos de cinco a partir de quince: 15, 20, 25, 30,… (Color verde)

- Presionando el botón nueve dos veces y luego indefinidamente el botón cinco;

  $$\begin{aligned} 1 + 9 + 9 + 5 &= (\overset{\circ}{5} + 1) + (\overset{\circ}{5} + 4) + (\overset{\circ}{5} + 4) + \overset{\circ}{5} \\ &= \overset{\circ}{5} + 1 + 4 + 4 \\ &= \overset{\circ}{5} + 9 = \overset{\circ}{5} + 4 \qquad (\geq 24) \end{aligned}$$

  Vamos a tachar todos los múltiplos de cinco más cuatro a partir de veinticuatro: 24, 29, 34, 39,… (Color celeste)

- Presionando el botón nueve tres veces y luego indefinidamente el botón cinco;

  $$\begin{aligned} 1 + 9 + 9 + 9 + 5 &= (\overset{\circ}{5} + 1) + (\overset{\circ}{5} + 4) + (\overset{\circ}{5} + 4) + (\overset{\circ}{5} + 4) + \overset{\circ}{5} \\ &= \overset{\circ}{5} + 1 + 4 + 4 + 4 \\ &= \overset{\circ}{5} + 13 = \overset{\circ}{5} + 3 \qquad (\geq 33) \end{aligned}$$

  Vamos a tachar todos los múltiplos de cinco más tres a partir de treinta y tres: 33, 38, 43, 48,… (Color morado)

- Presionando el botón nueve cuatro veces y luego indefinidamente el botón cinco;

  $$\begin{aligned} 1 + 9 + 9 + 9 + 9 + 5 &= (\overset{\circ}{5} + 1) + (\overset{\circ}{5} + 4) + (\overset{\circ}{5} + 4) + (\overset{\circ}{5} + 4) + (\overset{\circ}{5} + 4) + \overset{\circ}{5} \\ &= \overset{\circ}{5} + 1 + 4 + 4 + 4 + 4 \\ &= \overset{\circ}{5} + 17 = \overset{\circ}{5} + 2 \qquad (\geq 42) \end{aligned}$$

  Vamos a tachar todos los múltiplos de cinco más dos a partir de cuarenta y dos: 42, 47, 52, 57,… (Color anaranjado)

  Los números en los casilleros blancos no han sido tachados:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

El mayor número que no se puede obtener en la pantalla es 32, cuya suma de cifras es: 3 + 2 = 5.

RESPUESTA: La suma de los dígitos de dicho número es 5. **CLAVE A**.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN