XIII Olimpiada Nacional Escolar de Matemática (ONEM 2016)
Primera Fase - Nivel 2 – Solucionario.

1) En una tienda compré arroz por un valor de 7 soles y pagué con un billete de 50 soles. Me dieron de vuelto solamente monedas de 2 y 5 soles. Si recibí 4 monedas de 2 soles, ¿Cuántas monedas de 5 soles recibí?

A) 11 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

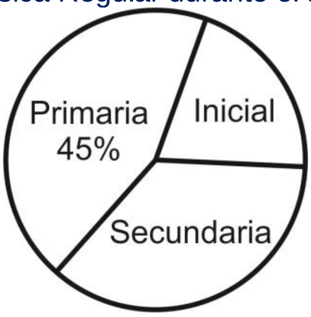
SOLUCION:
Planteando:
Compré arroz por: S/. 7
Pagué: S/. 50 (1 billete)
Recibí:

$$\underbrace{\text{4 monedas de S/. 2}}_{8} + \underbrace{\text{“X” monedas de S/. 5}}_{5X} = 43$$

$$8 + 5X = 43$$
$$5X = 35$$
$$X = 7$$

RESPUESTA: Recibí 7 monedas de S/. 5. **CLAVE C.**

2) En el siguiente gráfico circular se muestra el porcentaje de estudiantes peruanos matriculados en la modalidad de Educación Básica Regular durante el año 2015:



Si el porcentaje de estudiantes de Inicial es al porcentaje de alumnos de Secundaria como 2 es a 3, determina el porcentaje de alumnos de Secundaria.

A) 18% B) 22% C) 27% D) 30% E) 33%

SOLUCION:
Planteando:

$$\frac{Inicial}{Secundaria} = \frac{2k}{3k}$$

2k +3k + 45% = 100%
5k = 55%
K = 11%

Por tanto, Secundaria: 3k = 3(11%) = 33%

RESPUESTA: Los alumnos de secundaria representan el 33%. **CLAVE E.**

3) José tiene dos hermanos llamados David y Carmen. David tiene 4 años más que José y Carmen tiene 3 años menos que José. Resulta que la suma de edades de los tres hermanos es igual a la edad de su padre que tiene 43 años. ¿Cuál es la edad de José?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

SOLUCION:
Plateando las ecuaciones:
José: X
David: X + 4
Carmen: X – 3
X + X + 4 + X – 3 = 43 (Suma de las edades de los tres hermanos es igual a 43 años)
3X = 42
X = 14

RESPUESTA: José tiene 14 años de edad. **CLAVE D**.

4) María debe comprar 15 kilos de arroz para una fiesta. La bolsa de 750 gramos cuesta S/. 3,90 y la bolsa de 5 kilos cuesta S/. 25,00 ¿Cuántos soles ahorrará María si en vez de comprar únicamente bolsas de 750 gramos compra únicamente bolsas de 5 kilos?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

SOLUCION:
Planteando:
1 Bolsa de 750 g cuesta S/. 3,90
1 Bolsa de 5 kg cuesta S/. 25,00
Convirtiendo a kilogramos 750 gramos: 750 g = 750x10^{-3} kg = 0,75 kg
Hallando el monto de cada una:
Bolsa de 0,75 kg:

$$\frac{15}{0{,}75} \times 3{,}90 = \frac{15 \times 390}{75} = 78$$

Bolsa de 5 kg:

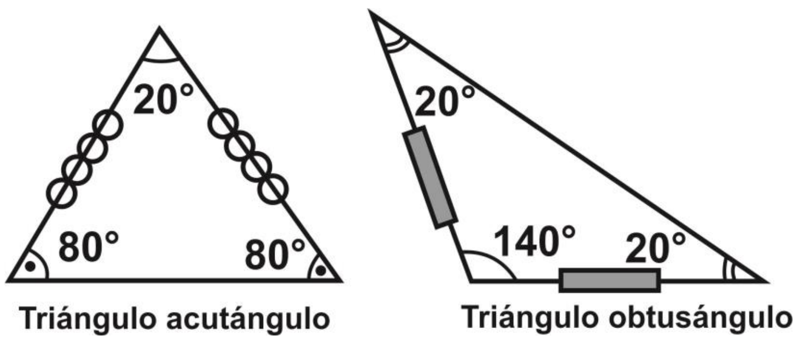
$$\frac{15}{3} \times 25{,}00 = 3 \times 25 = 75$$

Ahorrará María: 78 – 75 = 3.

RESPUESTA: María ahorrará S/. 3. **CLAVE A**.

5) Se dibujan dos triángulos, uno acutángulo y el otro obtusángulo. Ambos triángulos son isósceles y cada uno tiene al menos un ángulo de 20°.
Indique la alternativa correcta:
A) El mayor ángulo del triángulo acutángulo es 60°
B) El menor ángulo del triángulo acutángulo es 40°
C) El mayor ángulo del triángulo obtusángulo es 140°
D) El mayor ángulo del triángulo obtusángulo es 160°
E) El menor ángulo del triángulo obtusángulo es 100°

SOLUCION:
Graficando:



Analizando cada una de las alternativas:
A) Falso, porque el mayor ángulo es 80°
B) Falso, porque el menor ángulo es 20°
C) Verdadero, porque el mayor ángulo es 140°
D) Falso, porque el mayor ángulo es 140°
E) Falso, porque el menor ángulo es 20°

RESPUESTA: La alternativa correcta es la opción “C”. **CLAVE C.**

6) En un torneo de fútbol el equipo Los Guacamayos resultó campeón. Raúl el goleador de este equipo, anotó 11 goles en los primeros seis partidos. Si en total se jugaron 7 partidos, ¿Cuántos goles anotó Raúl en el último partido para que su promedio de goles haya sido 2?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

SOLUCION:
Planteando:
Raúl anotó 11 goles en los primeros seis partidos.
Raúl anotó “X” goles en el último partido.

$$\frac{P1+P2+P3+P4+P5+P6+P7}{7}=2$$

$$\frac{11+X}{7}=2$$

$$X=14-11=3$$

RESPUESTA: Raúl anotó 3 goles en el último partido para que su promedio de goles sea dos.
CLAVE C.

7) Juana y Rosa fueron a la misma tienda a hacer sus compras. Juana compró 2 litros de leche y 1 kilogramo de azúcar; Rosa compró 3 litros de leche y 4 kilogramos de azúcar. Si Juana gastó 10 soles y Rosa gastó 22 soles, ¿Cuántos soles cuesta el litro de leche en dicha tienda?

A) 1,8 B) 2,4 C) 3,6 D) 4,8 E) 6

SOLUCION:
Planteando el sistema de ecuaciones de dos variables:

$$\begin{cases} 2L + 1A = 10 & \rightarrow \quad \text{Juana} \\ 3L + 4A = 22 & \rightarrow \quad \text{Rosa} \end{cases}$$

Donde, L: Número de litros de leche. A: Número de kilogramos de azúcar.
Resolviendo por el método de reducción:

$$\begin{cases} -8L - 4A = 10(-4) & \text{Multiplicando por } (-4) \text{ a la primera ecuación.} \\ 3L + 4A = 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8L - 4A = -40 \\ 3L + 4A = 22 \end{cases}$$

Sumando ambos miembros:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} -8L - 4A = -40 \\ \;\;3L + 4A = \;\;22 \end{cases} \\ \hline -8L + 3L = -40 + 22 \end{array}$$

–5L = –18
L = 18/5 = 3,6

RESPUESTA: El litro de leche cuesta S/. 3,60. **CLAVE C**.

8) Un artesano fabricó cierta cantidad de joyas iguales. Si vende cada joya a 12 soles recaudará menos de 250 soles, pero si vende cada joya a 13 soles recaudará más de 250 soles. ¿Cuántas joyas fabricó el artesano?

A) 17 B) 18 C) 19 D) 20 E) 21

SOLUCION:
Planteando:
Cantidad de joyas: X
Si vende cada joya a 12 soles recaudará menos de 250 soles

$$12X < 250$$
$$X < \frac{250}{12}$$
$$X < 20{,}83$$

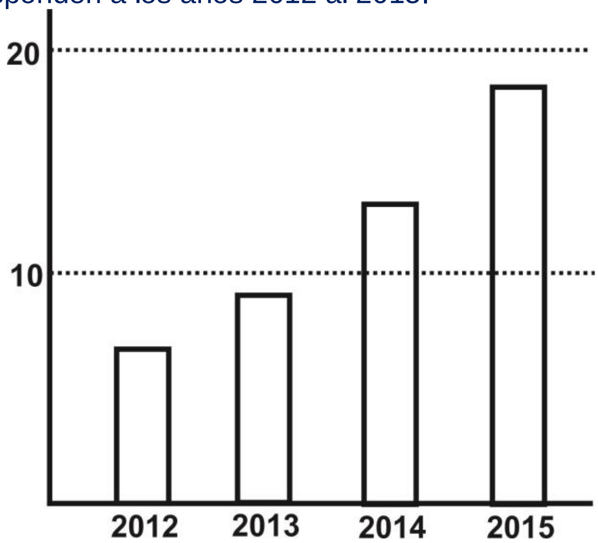
Si vende cada joya a 13 soles recaudará más de 250 soles

$$13X > 250$$
$$X > \frac{250}{13}$$
$$X > 19{,}23$$

De ambas inecuaciones se tiene: 20,83 > X > 19,23. Por tanto: X = 20 (número entero)

RESPUESTA: El artesano fabricó 20 joyas. **CLAVE D**.

9) En el siguiente gráfico se muestra la cantidad de estudiantes de quinto grado de secundaria del colegio Mariscal Castilla, que han decidido estudiar Matemática, influenciados por la ONEM. Los datos corresponden a los años 2012 al 2015.



Se sabe que la cantidad de estudiantes en el 2015 fue el doble que en el 2013 y el triple que en el 2012. Además, hubo 4 estudiantes más el año 2014 que el año 2013. ¿Cuánto fue el incremento de estudiantes desde el año 2014 al año 2015?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

SOLUCION:

Planteando las ecuaciones:
Año 2012: 2X
Año 2013: 3X
Año 2014: 3X + 4
Año 2015: 6X
Tanteando los valores de "X"
"X" no puede tomar los valores de 1 ni de 2 porque no llegarían a la altura que corresponde su respectiva frecuencia absoluta. Por tanto: X = 3 ("X" tampoco puede tomar valores mayores a tres)
Reemplazando se tiene:
Año 2014: 3(3) + 4 =13
Año 2015: 6(3) = 18
Incremento de estudiantes desde el año 2014 al año 2015 = 18 – 13 = 5.

RESPUESTA: El incremento fue de 5 estudiantes desde el año 2014 al 2015. **CLAVE E**.

10) Antonio quiere comprar un electrodoméstico. En la tienda A dicho electrodoméstico cuesta 1200 soles y le ofrecieron un descuento del 10%. En la tienda B dicho electrodoméstico cuesta algo más, pero le ofrecieron un descuento del 20%. Antonio se dio cuenta que al final el precio del electrodoméstico en ambas tiendas era el mismo. ¿Cuánto costaba inicialmente el electrodoméstico en la tienda B?

A) 1300 B) 1350 C) 1400 D) 1450 E) 1500

SOLUCION:
Planteando:
Tienda A: Electrodoméstico = S/. 1200 $\rightarrow$ Descuento del 10%.
Tienda B: Electrodoméstico = S/. 1200 + X $\rightarrow$ Descuento del 20%.

Tienda A = Tienda B
90%x1200 = 80%(1200+X)
9x1200 = 8(1200+X)
9x150 = 1200+X
1350 – 1200 = X
150 = X

Tienda B: Electrodoméstico = S/. 1200 + S/. 150 = S/. 1350

RESPUESTA: El electrodoméstico en la tienda B inicialmente costaba S/. 1350. **CLAVE B**.

11) Sonia tiene N ovejas, donde N es un número entero mayor que 35 y menor que 65. Ella puede separar sus ovejas en grupos, con 5 ovejas en cada grupo, pero no puede hacer lo mismo con 2 ovejas en cada grupo ni con 3 ovejas en cada grupo. Determina el número de ovejas N.

A) 40 B) 45 C) 50 D) 55 E) 60

SOLUCION:
Planteando: "N" ovejas, $N \in Z$
$35 < N < 65$

También: $\mathbf{N = \overset{o}{5}}$; $\mathbf{N \neq \overset{o}{2}}$ y $\mathbf{N \neq \overset{o}{3}}$

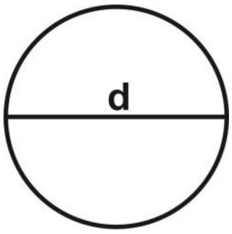
N = 40; 45; 50; 55; 60
45 y 60 son múltiplos de tres; 40 y 50 son múltiplos de dos, por tanto: N = 55.

RESPUESTA: El número de ovejas es 55. **CLAVE D**.

12) Van a construir una pista circular alrededor de un estadio para los entrenamientos de los maratonistas. ¿Cuál debe ser el diámetro aproximado de la pista si un corredor debe cubrir un recorrido total de 42 km al dar 25 vueltas completas a la pista?
Nota: Considere la aproximación $\pi = 3{,}14$.

A) 311,9 m B) 267,5 m C) 475,8 m D) 623,8 m E) 535 m

SOLUCION:
Graficando:



La longitud de la circunferencia está dato por: C = 2πR (R: Radio)
C = Dπ (D: Diámetro)
42 km = 25(Dπ) (25 vueltas)
42 000 m = 25(3,14)D
42 000 m = 78,5D
42 000 m/78,5 = D
535,03 m = D → D = 535 m (Redondeando)

RESPUESTA: El diámetro aproximado de la pista es 535 m. **CLAVE E**.

13) Para ser miembro de un club, se tiene que pagar por única vez 150 soles por cuota de ingreso y una mensualidad de 60 soles. Sin embargo, si se paga por adelantado el costo por un tiempo determinado, el club ofrece un 10% de descuento al monto total. Ramiro quiere ser miembro del club durante n meses, para lo cual debe pagar por adelantado el monto total M. Determine M, en función de n.
A) M = 60n + 150
B) M = 54n + 145
C) M = 135n + 60
D) M = 54n + 135
E) M = 45n + 150

SOLUCION:
Planteando:
Pago por el ingreso: S/. 150 (Pago único)
Pago de mensualidad: S/. 60 (Pago que depende de la cantidad de meses)
Tiempo de permanencia: "n" meses.
Descuento: 10% al monto total.
Por tanto el dinero invertido en función de "n" será:
Dinero que gastará Ramiro:

$$M(n) = 90\%(60n + 150)$$
$$M(n) = \frac{90}{100}(60n + 150)$$
$$M(n) = \frac{9}{10}(60n) + \frac{9}{10}(150)$$
$$M(n) = 54n + 135$$

RESPUESTA: M en función de "n" está dato por: M(n) = 54n + 135. **CLAVE D**.

14) Un tanque que almacena gasolina está completamente lleno. Debido a un desperfecto, cada semana se evapora la quinta parte de la gasolina que hay en el tanque. Después de 3 semanas se evaporó 122 litros de gasolina. ¿Cuántos litros de gasolina había inicialmente en el tanque?

A) 250 B) 200 C) 300 D) 244 E) 350

SOLUCION:
Sea "x" la cantidad inicial de gasolina.
Cada semana se evapora 1/5 parte que hay en el tanque.
Primera semana:

$$Evapora = \frac{1}{5},\ \ Queda = \frac{4}{5}$$

Segunda semana:

$$Evapora = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{4}{25},\ \ Queda = \frac{4}{5}\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{16}{25}$$

Tercera semana:

$$Evapora = \frac{1}{5}\left(\frac{16}{25}\right) = \frac{16}{125},\ \ Queda = \frac{4}{5}\left(\frac{16}{25}\right) = \frac{64}{125}$$

Se evapora en total:

$$Total\ evaporado: \frac{x}{5} + \frac{4x}{25} + \frac{16x}{125} = 122$$

$$\frac{25x + 20x + 16x}{125} = 122$$

$$\frac{61x}{125} = 122$$

$$x = \frac{122 \times 125}{61} = 250$$

RESPUESTA: El tanque inicialmente tenía 250 litros de gasolina. **CLAVE A**.

15) ¿Cuál es el mayor divisor de 2016 cuyo cuadrado también es divisor de 2016?

A) 9 B) 12 C) 16 D) 18 E) 24

SOLUCION:
Plateando:

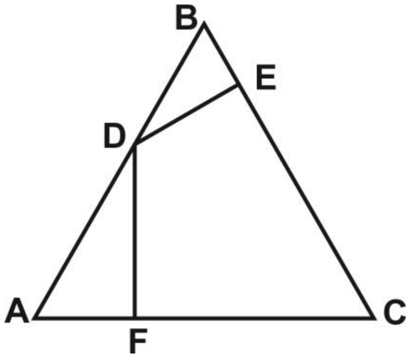
$$\mathbf{2016 = \overset{o}{\overline{\text{Mayor Divisor}}}}$$

Descomponiendo en sus factores primos:
$2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$
$2016 = \underbrace{2^2 \times 3}_{N} \times \underbrace{2^2 \times 3}_{N} \times 7 \times 2$

$N = 2^2 \times 3 = 12$ (N es divisor de 2016 y N^2 también es divisor de 2016)

RESPUESTA: El mayor divisor de 2016 cuyo cuadrado también es divisor de 2016 es 12.
CLAVE B.

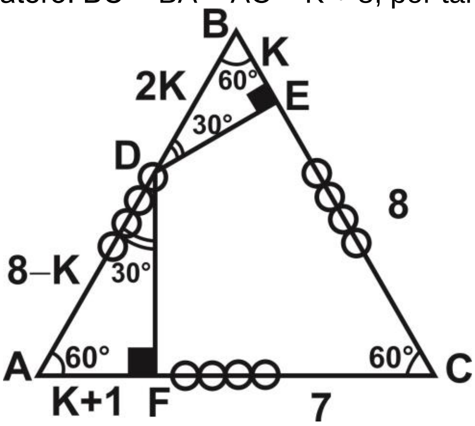
16) Sea ABC un triángulo equilátero y sea D un punto del lado AB. Sean E y F los pies de las perpendiculares trazadas desde D hacia los lados BC y AC, respectivamente. Si CE = 8 y CF = 7, determina el perímetro del triángulo ABC.



A) 20 B) 21 C) 24 D) 25 E) 30

SOLUCION:

ΔABC es equilátero, por tanto: m∠ABC = m∠BCA = m∠CAB = 60°. Además: m∠DAF = 30° y m∠BDE = 30°. También ΔDAF y ΔBED son notables (De 30° y 60°), si BE = K, entonces: DB = 2K. Como el ΔABC es equilátero: BC = BA = AC = K + 8, por tanto: DA = 8 – K, AF = K + 1.



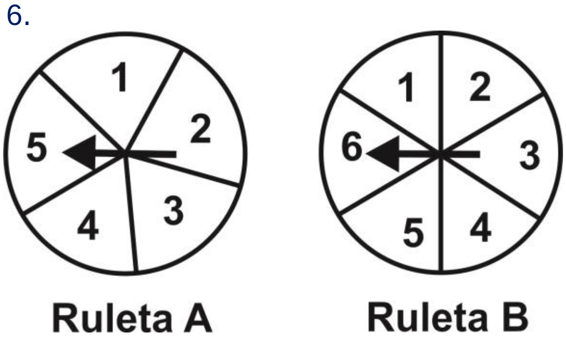
ΔDAF ~ ΔBED

$$\frac{K}{1+K} = \frac{2K}{8-K}$$
$$8-K = 2(1+K)$$
$$8-K = 2+2K$$
$$8-2 = K+2K$$
$$6 = 3K$$
$$2 = K$$

Como el ΔABC es equilátero: BC = BA = AC = K + 8 = 2 + 8 = 10. Por tanto el perímetro es = 3(10) = 30.

RESPUESTA: El perímetro del ΔABC es 30. **CLAVE E**.

17) Un juego consiste en girar dos ruletas. La ruleta A tiene los números del 1 al 5 y la ruleta B tiene los números del 1 al 6.



Para ganar un premio el número que apunte la flecha de la ruleta A debe ser mayor que el número que apunte la flecha de la ruleta B. ¿Cuál es la probabilidad de ganar un premio?

A) 1/4 B) 1/3 C) 2/5 D) 1/2 E) 3/10

SOLUCION:
Hallando el espacio muestral:
Ω = {(1;1),(1;2),(1;3),(1;4),(1;5),(1;6),
(2;1),(2;2),(2;3),(2;4),(2;5),(2;6),
(3;1),(3;2),(3;3),(3;4),(3;5),(3;6),
(4;1),(4;2),(4;3),(4;4),(4;5),(4;6),
(5;1),(5;2),(5;3),(5;4),(5;5),(5;6)}
Definiendo el evento "M":
M = El número que apunte la flecha de la ruleta A debe ser mayor que el número que apunte la flecha de la ruleta B.
M = {(2;1),(3;1),(3;2),(4;1),(4;2),(4;3),(5;1),(5;2),(5;3),(5;4)} → n(A) = 10

$$P(M) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

RESPUESTA: La probabilidad de ganar es 1/3. **CLAVE B**.

18) Los números reales positivos x; y; z satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

xy + x + y = 2;
yz + y + z = 5;
zx + z + x = 7.

Determina el valor de x + y + z.

A) 7/2 B) 4 C) 9/2 D) 7 E) 15/2

SOLUCION:
Planteando:
xy + x + y = 2 ....(1)
yz + y + z = 5 ....(2)
zx + z + x = 7 ....(3)
Despejando "x" en la ecuación (1)

$$xy + x + y = 2$$
$$x(y+1) + y = 2$$
$$x = \frac{2-y}{y+1} \quad \ldots..(\alpha)$$

Reemplazando (α) en la ecuación (3)

$$zx + z + x = 7$$
$$z\left(\frac{2-y}{y+1}\right) + z + \frac{2' - y}{y+1} = 7$$
$$2z - zy + zy + z + 2 - y = 7(y+1)$$
$$3z + 2 - y = 7y + 7$$
$$3z = 8y + 5 \quad \ldots\ldots(\beta)$$

Reemplazando (β) en la ecuación (2)

$$yz + y + z = 5$$
$$3yz + 3y + 3z = 3 \times 5 \quad \ldots..(\times 3)$$
$$(3z)y + 3y + 3z = 15$$
$$(8y+5)y + 3y + 8y + 5 = 15$$
$$8y^2 + 5y + 3y + 8y + 5 = 15$$
$$8y^2 + 16y - 10 = 0$$
$$4y^2 + 8y - 5 = 0$$

$$(2y-1)(2y+5)=0$$
$$2y-1=0 \quad \vee \quad 2y+5=0$$
$$y=\frac{1}{2} \quad \vee \quad y=\frac{-5}{2}$$

$$y=\frac{1}{2} \quad \dots..(\theta)$$

Reemplazando (θ) en la ecuación (β)

$$3z=8y+5$$
$$3z=8\left(\frac{1}{2}\right)+5$$
$$3z=4+5$$
$$z=\frac{9}{3}$$
$$z=3 \quad \dots\dots.(\gamma)$$

Reemplazando (γ) en la ecuación (3)

$$zx+z+x=7$$
$$3x+3+x=7$$
$$4x=4$$
$$x=1$$

Finalmente, hallando:

$$x+y+z$$
$$1+\frac{1}{2}+3$$
$$4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$$

RESPUESTA: El valor de: x + y + z = 9/2. **CLAVE C.**

19) La maestra Jimena escribió en la pizarra los números 1; 7; 13; 19; 25; 31, y luego los alumnos hallaron todos los números primos que se pueden obtener al sumar dos o más números de la pizarra. ¿Cuántos números primos hallaron los alumnos?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

SOLUCION:

Expresando los números en función de múltiplo de tres:

$1 = \overset{\circ}{3} + 1$
$7 = \overset{\circ}{3} + 1$
$13 = \overset{\circ}{3} + 1$
$19 = \overset{\circ}{3} + 1$
$25 = \overset{\circ}{3} + 1$
$31 = \overset{\circ}{3} + 1$

- Al sumar dos números impares siempre tendremos un número par (número compuesto)
- Al sumar tres números tendremos siempre un número múltiplo de tres, por ejemplo sumamos:

$$1 \quad + \quad 7 \quad + \quad 13$$
$$(\overset{\circ}{3} + 1) + (\overset{\circ}{3} + 1) + (\overset{\circ}{3} + 1)$$
$$\overset{\circ}{3} + \overset{\circ}{3} + \overset{\circ}{3} + 1 + 1 + 1$$
$$\overset{\circ}{3} + 3$$
$$\overset{\circ}{3}$$

- Al sumar cuatro números impares siempre tendremos un número par (número compuesto)
- Ahora sumaremos cinco números:
  1 + 13 + 19 + 25 + 31 = 89 (número primo)
  1 + 7 + 19 + 25 + 31 = 83 (número primo)
  1 + 7 + 13 + 25 + 31 = 77 (número compuesto)
  1 + 7 + 13 + 19 + 31 = 71 (número primo)
  1 + 7 + 13 + 19 + 25 = 65 (número compuesto)
  7 + 13 + 19 + 25 + 31 = 95 (número compuesto)

RESPUESTA: Los alumnos hallaron 3 números primos. **CLAVE A**.

20) Se tiene una fila de 14 cuadraditos enumerados de la siguiente forma:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Al inicio se coloca una piedra sobre uno de los cuadraditos. La piedra realiza una secuencia de movimientos de la siguiente forma: Si la piedra está en el cuadradito n, en el siguiente paso se puede mover al cuadradito n–2 o al cuadradito 2n (sin salirse de la fila). Está permitido que la piedra visite a un cuadradito más de una vez.
¿Como máximo cuántos cuadraditos diferentes puede visitar la piedra en una secuencia de movimientos si podemos escoger libremente la posición inicial de la piedra?

A) 14 B) 13 C) 12 D) 11 E) 10

SOLUCION:
Posición inicial: 13

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Movimiento: n – 2 = 13 – 2 = 11

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Movimiento: n – 2 = 11 – 2 = 9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Movimiento: n – 2 = 9 – 2 = 7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Movimiento: n – 2 = 7 – 2 = 5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Movimiento: n – 2 = 5 – 2 = 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Movimiento: n – 2 = 3 – 2 = 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Movimiento: 2n = 2(1) = 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Movimiento: 2n = 2(2) = 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Movimiento: 2n = 2(4) = 8

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Movimiento: n – 2 = 8 – 2 = 6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Movimiento: 2n = 2(6) = 12

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Movimiento: n – 2 = 12 – 2 = 10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

RESPUESTA: La piedrita visita 13 cuadraditos diferentes. **CLAVE B**.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN